Obsah

1 Značení

Značení a_{-i} v kontextu nějakého vektoru velikosti n, například $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je vlastně vektor velikosti $n - 1$ $a_{-i} = (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Dosazujeme-li takovou n-tici do funkce f zavádíme $f(a) = f(a_i; a_{-i})$ a chceme i prvek nahradit tak to značíme jako $f(\cdot; a_{-i})$, kde $\cdot$ je prvek na i pozici.

TODO: definice pro geometrii.

2 Hledání Nashových ekvilibrií

2.1 Hry v normální formě

Definition 2.1. *(Konečná, n-hráčská) hra v normální formě je trojice* $G = (P, A, u)$, *kde*

- P *je množina hráčů, kde standartně* $|P| = n$ *a zpravidla je to množina indexů není-li definováno jinak,*
- $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, *kde* A_i *je množina dostupných akcí pro hráče* i,
- $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *je* n*-tice, kde každé* $u_i : A \to \mathbb{R}$ *se nazývá užitková, nebo také výplatní funkce pro hráče* i.

Každá taková hra $G = (P, A, u)$ *je reprezentovatelná také jako matice* $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *že* $M = (M_a)_{a\in A}$, *kde* $M_a = u(a)$.

Hra probíhá tak, že každý hráč zná užitkovou funkci a každý zvolí svou akci naráz, tedy hráč i zvolí právě jednu $a_i \in A_i$. Tím se vytvoří profil akcí $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ten se vyhodnotí každou u_i z u a hráč i získá výsledek v podobě $u_i(a)$. Tedy když vyhodnocujeme profil akcí a tak máme přepisem $u(a) = (u_1(a), u_2(a), \ldots, u_n(a))$ Taková $u_i(a)$ hodnota ukazuje na hráčovu úroveň radosti z jeho rozhodnutí (akce a_i) v kontextu rozhodnutí ostatních a_{-i}.

Každý hráč se může chovat podle nějaké strategie. To jest nějakého předpisu jak zvolit a_i z A_i, kterou zahrát. Nejjednodušší taková je čistá, nebo také ryzí, strategie.

Definition 2.2. *Čistá strategie je strategie, kde hráč vybere vždy jen jednu zafixovanou akci z odpovídající* A_i. *Množina možných čistých strategií je právě* A_i. *Profil čisté strategie je* n*-tice* $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, *kde každé* $s_i \in A_i$ *odpovídající každému hráči* i.

Další možná strategie je smíšená strategie.

Definition 2.3. *Smíšená strategie je taková, že hráč* i *zvolí akci z* A_i *na základě nějaké pravděpodobnostní distribuce na* A_i. *Množina smíšených strategií* S_i *pro hráče* i *je množina* $\prod(A_i)$, *kde* $\prod(X)$ *je množina všech pravděpodobnostních distribucí nad množinou* X. *Profil smíšené strategie je tedy* n*-tice* $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, *kde* $s_i \in S_i$.

U smíšené strategie s_i hráče i akce $a_i \in A_i$ používáme $s_i(a_i) \in [0, 1]$ jako pravděpodobnost výběru akce a_i při smíšené strategii s_i.

Definition 2.4. *Množina* $Supp(s_i) = \{a_i \in A_i : s_i(a_i) > 0\}$ *je doména smíšené strategie* s_i. *Pokud doména* s_i *je rovna* A_i *pak je* s_i *úplně smíšená strategie. A mají-li takovou všichni hráči tak pak i profil je profil plně smíšené strategie.*

Pro každého hráče platí, že se snaží maximalizovat svůj očekávaný výdělek, tedy střední hodnota u_i s $\prod_{j=1}^{n} s_j$.

Definition 2.5. *Střední hodnota užitkové funkce smíšené strategie* $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *pro hru v normálním tvaru 2.1* $G = (P, A, u)$ *hráče* i *je*

$$u_i(s) = \sum_{a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in A} u_i(a) \prod_{j=1}^{n} s_j(a_j) = \sum_{a_i\in A_i} s_i(a_i) \cdot u_i(a_i; s_{-i})$$

Definition 2.6. *Zero-sum hra je bimaticová hra* $G = (\{1, 2\}, A, u)$, *taková že* $\forall a \in A : u_1(a) + u_2(a) = 0$

2.2 Nashovo ekvilibrium

V teorii her se snažíme za předpokladu, že se každý hráč snaží o maximalizaci střední hodnoty užitkové funkce 2.5, o "předvídání"jak bude každá hra hrána. Formálně se snažíme o nalezení konceptu řešení, tedy zobrazení z množiny her v normální formě 2.1, aby se hra G zobrazila na množinu profilů strategií G. Takové koncepty řešení mohou být různá optima, třeba Nashovo, či Pareto.

Definition 2.7. *Nejlepší odpovědí hráče i na profil strategií s_{-i} je smíšená strategie 2.3 s_i^*, taková že $\forall s_i' \in S_i : u(s_i'; s_{-i}) \leq u(s_i^*; s_{-i})$*

Definition 2.8. *Nashovo ekvilibrium u hry v normálním tvaru 2.1 $G = (P, A, u)$ je profil strategií $(s_1, s_2, \ldots, s_3)$, takové že s_i je nejlepší odpovědí hráče i na s_{-i} pro všechny hráče $i \in P$*

Tedy ve zkratce Nashovo ekvilibrium je stav hry, kdy pokud odhalíme postupně každému i-tému hráči akce ostatních a_{-i}, tak by neměl motivaci měnit svojí akci a_i, tedy už neexistuje akce která by zvětšovala jeho radost z výsledku hry. Ekvilibria přejímají jako přídavky jejich typy podle profilů strategií a tedy čistá 2.2, smíšená 2.3, či plně smíšená.

2.3 Nashova věta

Theorem 2.1 (Nashova věta)**.** *Každá hra v normální formě 2.1 má Nashovo ekvilibrium 2.8.*

Pro větu si půjčujeme poměrně dost z oblasti matematické analýzy a celý důkaz je jen topologický a ne konstruktivní, tedy dokázáním věty stále nemáme tušení, jak taková ekvilibria vypadají, ani jak, či zda vůbec se jich dopočítáme, jen víme, že nějaká jsou. Takový fakt nám pak posouvá problém hledání (nejen) Nashových ekvilibrií mimo třídy P, či NP, které jsou z definice rozhodovací a odpověď na otázku zda existuje Nashovo ekvilibrium je velmi nudná a díky Nashově větě je vždy ANO.

Pro důkaz je důležitá vlastnost *kompaktnosti*, tedy bavíme-li se o $X \subseteq \mathbb{R}^d$ je X *kompaktní* je-li uzavřená a omezená, tedy máme nějaké konstanty které ji omezují a uzavřená je pokud limity jejich posloupností jsou vždy uvnitř takové množiny. *Konvexita* podmnožiny $Y \subseteq \mathbb{R}^d$ je Y, kde $\forall x, y \in Y$ platí $tx + (1-t)y \in Y, t \in [0,1]$. Také se hodí definice *simplexu*, tedy pro n affině nezávislých bodů $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je $(n-1)$-simplex množina $\Delta_n = \Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ množiny bodů $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je konvexní kombinace těchto bodů, tedy

$$\Delta_n = \left\{ y | y = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i, \forall i \in 1, 2, \ldots, n, t_i \in [0,1], \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}$$

Theorem 2.2 (Brouwerova věta o pevném bodu)**.** *Pro $d \in \mathbb{N}$, K je neprázdná kompaktní konvexní množina v $\mathbb{R}^d$. Nechť $f : K \to K$ je spojité zobrazení. Pak $\exists x_0 \in K : f(x_0) = x_0$, tedy f má pevný bod x_0.*

Theorem 2.3 (Lemma o kompaktnosti kartézského součinu kompaktních množin)**.** *Pro $n \in \mathbb{N}$ a $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$, nechť $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} K_i \in \mathbb{R}^{d_i}$ jsou kompaktní. Pak $K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_n$ je kompaktní v $\mathbb{R}^{d_1 + d_2 + \cdots + d_n}$.*

Náznak důkazu lemma 2.3. Stačí to ukázat pro případ kdy $n = 2$, zbytek se induktivně naskládá. Omezenost je jednoduchá a tedy katézským součinem nemáme jak uniknou nějaké konstantě, která omezovala K_1, či K_2, nazveme je C_1, C_2 a ty pak zase po složkách omezují nové prvky.

Uzavřenost je zase v tom, že nemáme jak po dvojicích vytvořit zase nějaké divoké posloupnosti, protože jestli po složkách limity patřily do původních množin, tak ty další složky nás nemohou nijak ovlivnit. □

Hlavní idea důkazu je, že si pro každého hráče definujeme jeho množinu smíšených strategií jako simplex v reálném prostoru, pak na základě lemmatu 2.3 je množina smíšených strategií kompaktní a konvexní. Dodefinujeme si zobrazení f, které hráče přesměruje z jeho aktuální strategie na nějakou strategii s', která zohledňuje odpovědi na strategie ostatních. Ukáže se, že f je spojitá a z Brouwerovy věty o pevném bodu 2.2 najdeme pevný bod který má tedy charakteristiku, že jestli se zobrazuje na sebe tak nemáme motivaci nic zlepšit a tedy jsme narazili vlastně na ekvilibrium s^*.

Důkaz Nashovy věty 2.1. Mějme hru v normálním tvaru 2.1 $G = (P, A, u)$. Pro každého hráče i zavedeme simplex S_i na množině jeho čistých strategií A_i.

$$S_i = \left\{ s_i \in \mathbb{R}^{|A_i|} : \forall a \in A_i s_i(a) \geq 0, \sum_{a \in A_i} s_i(a) = 1 \right\}$$

, kde $s_i(a)$, značí pravděpodobnost výběru akce a při smíšené strategii s_i.

Dle lemma 2.3 je i $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ kompaktní a konvexita je jednoduchá, protože pro $\forall s = (s_1, s_2, \ldots, s_n), s' = (s'_1, s'_2, \ldots, s'_n) \in S$ a $t \in [0, 1]$ máme jistě $ts + (1-t)s' \in S$, kde to se jen po složkách nasčítá a z konvexity původních S_i, tedy jednotlivých složek máme konvexitu S. Zaveďme si vhodné spojité zobrazení $f : S \to S$. Pro to mějme aktuální profil strategií $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, a pro každého hráče i a každou akci $a_i \in A_i$ definujeme funkci pro měření zlepšení užitku hráče i a tedy

$$\varphi_{i,a_i}(s_i) = \max\{0, u_i(a_i; s_{-i}) - u_i(s)\}.$$

Funkce φ_{i,a_i} jsou spojité, protože jsou složené ze spojité konstantní 0 a $u_i(a_i; s_{-i}) - u_i(s)$, která je taky spojitá, protože spojitost plyne z linearity $u_i(s) = \sum_{a \in A_i} s(a) u_i(a)$

S použitím φ_{i,a_i} můžeme definovat nový profil strategií s', jen je potřeba myslet na normalizování pravděpodobností, aby to stále byl profil strategií $s'_i(a_i) \in [0, 1]$ a $\sum_{a_i \in A_i} s'_i(a_i) = 1$

$$s'_i(a_i) = \frac{s_i(a_i) + \varphi_{i,a_i}(s_i)}{\sum_{b_i \in A_i} s_i(b_i) + \varphi_{i,b_i}(s)} = \frac{s_i(a_i) + \varphi_{i,a_i}(s_i)}{1 + \sum_{b_i \in A_i} \varphi_{i,b_i}(s)}$$

pro všechna $i \in P, a_i \in A_i$. Nakonec nastavíme $f(s) = s'$.

Taková f je spojitá, protože jen sčítáme spojité funkce. Tedy díky Brouwerově větě pevném bodu 2.2 získáváme, že f má nějaký pevný bod.

Teď zbývá ukázat, že s^* je pevným bodem f, právě tehdy když s^* je Nashovým ekvilibriem.

Pokud je s^* pevným bodem, pak pro každého hráče $i \in P$ a akci $a_i \in A_i$ platí $\varphi_{i,a_i}(s^*) = 0$. Tedy žadný z hráčů nemá jak si zvýšit svůj užitek přechodem na jinou strategii. Proto s^*_i je nejlepší odpovědí na s^*_{-i} pro všechna i, tedy je to z definice nutně Nashovo ekvilibrium 2.8. □

2.4 Pareto optimalita

Vzhledem k interpersonální neporovnatelnosti užitku mezi hráči, je nemožné preferovat zlepšení užitku jednoho hráče nad jiným, například pokud bychom byli neúčastnící se třetí strana která by mohla nějak zasahovat do hry. Tedy nás také zajímá *Pareto optimalita*, tedy takový stav, kde žadný hráč si nemůže pomoci k vyššímu užitku aniž by přitom nesnižoval užitek jiných.

Definition 2.9. *Profil stategie s ve hře v normální formě 2.1 Pareto dominuje profil strategie s', $s' \prec s$, když pro $\forall i \in P : u_i(s') \leq u_i(s)$ a $\exists j \in P : u_j(s') < u_j(s)$. $\prec$ je částečné uspořádání na množině S, tedy všech profilů strategií G.*

Definition 2.10 (Pareto optimalita)**.** *Profil strategie $s \in S$ je Pareto optimální, pokud neexistuje žadný profil strategie $s^* \in S : s \prec s^*$.*

2.5 Minimax věta

Definition 2.11. *Pro zero-sum hru 2.6 $G = (P, A, u)$ mějme $A_1 = \{1, 2, \ldots, m\}$ a $A_2 = \{1, 2, \ldots, n\}$, pak můžeme zavést $m \times n$ výplatní matici $M = (m_{i,j})$, takovou že $m_{i,j} = u_1(i, j) = -u_2(i, j)$*

Definition 2.12. *Vektory smíšených strategií $s = (s_1, s_2)$ jsou $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, které reprezentují s_1 a s_2. x_i pak značí pravděpodobnost $s_1(i)$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, obdobně pro y_j. Takové vektory splňují $\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{j=1}^n y_j = 1$*

S_1 a S_2 jsou simplexy $\Delta(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ a $\Delta(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, kde e_i, f_i značí příslušný vektor s 1 na pozici i a 0 jinde.

Definition 2.13. *S definicemi 2.11 a 2.12 máme výplatní funkci pro hráče 1*

$$u_1(s) = \sum_{a=(i,j)\in A} u_i(a) \cdot s_1(i)s_2(j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_i y_i = x^T My.$$

Pak zavádíme funkce $\beta(x) = \min_{y\in S_2} x^T My$ a $\alpha(y) = \max_{x\in S_1} x^T My$. Kde $\beta(x)$ je vlastně nejvyšší užitek hráče 2 proti strategii hráče 1 (x), protože $u_1(s) = -u_2(i, j)$ 2.6. $\alpha(y)$ je naopak nejvyšší možný užitek hráče 1 proti akci y hráče 2.

Zjevně je-li (x, y) Nashovo ekvilibrium 2.8, pak $\beta(x) = x^T My = \alpha(y)$

Za předpokladu že 2 zvolí pro něj nejvýhodnější akci vůči každé akci hráče 1, pak 1 zvolí smíšenou strategii $\bar{x} \in S_1$ 2.3, která maximalizuje jeho střední hodnotu užitkové funkce 2.5. $\beta(\bar{x}) = \max_{x\in S_1} \beta(x)$ platí a je optimální v nejhorším případě. To samé platí pro hráče 2 a α.

Theorem 2.4 (Lemma o vlastnostech funkcí α a β)**.**

1. *Pro všechny smíšené strategie 2.3 $x \in S_1$ a $y \in S_2$ máme $\beta(x) \le x^T My \le \alpha(y)$*
2. *Pokud je (x^*, y^*) Nashovo ekvilibrium 2.8, pak obě x^* i y^* jsou optimální v nejhorším případě pro hráče 1 i 2.*
3. *Pro smíšené strategie 2.3 $x^* \in S_1$ a $y^* \in S_2$ splňující $\beta(x^*) = \alpha(y^*)$ pak (x^*, y^*) je Nashovo ekvilibrium 2.8.*

Důkaz lemma o vlastnostech funkcí α a β.

1. Toto plyne z definice funkcí α a β.
2. *1.* implikuje, že $\forall x \in S_1 : \beta(x) \le \alpha(y^*)$. Když (x^*, y^*) je Nashovo ekvilibrium, tak $\beta(x^*) = \alpha(y^*)$, máme $\forall x \in S_1 : \beta(x) \le \beta(x^*)$, tedy je to optimální v nejhorším případě, stejně jako y^* s α pro hráče 2.
3. Pokud $\beta(x^*) = \alpha(y^*)$ pak *1.* implikuje, že $\beta(x^*) = (x^*)^T My^* = \alpha(y^*)$. tedy je to Nashovo ekvilibrium.

□

Theorem 2.5 (Minimax věta)**.** *Pro každou zero-sum hru 2.6, existují optima v nejhorším případě pro oba hráče a dají se efektivně spočítat lineárním programováním. Navíc existuje číslo v, takové že optima v nejhorším případě x^*, y^* obou hráčů tak profil strategií (x^*, y^*) je Nashovo ekvilibrium 2.8 a $\beta(x^*) = (x^*)^T My^* = \alpha(y^*) = v$*

Definition 2.14 (Lineární programování)**.** *Lineární program je optimalizační problém a v kanonické formě P má tvar: $c \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$ a $n \times m$ matici reálných čísel A. Maximalizujeme $c^T x$ s omezeními $Ax \le b$ a $x \ge 0$. Lineární programy se dají efektivně řešit simplexovou metodou a dalšími.*

P nazveme primární lineární program je definován stejně jako ten výše, D je duální program, kde chceme minimalizovat $b^T y$ s omezeními $A^T y \ge c$, kde $y \ge 0$.

Theorem 2.6 (Věta o dualitě)**.** *Pokud P a D 2.14 mají přípustná řešení, tak obě mají optimální řešení. Navíc jsou-li x^*, y^* optima P, D, tak $c^T x^* = b^T y^*$. Tedy v optimu mají výsledky stejné.*

Důkaz minimax věty 2.5. Hráč 2 chceme minimalizovat zisk pro hráče 1, tedy pro zafixovanou smíšenou strategii $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ hráče 1. Vyrobíme si lineární program P, který najde optimum pro minimalizaci výdělku hráče 1: $\min x^T My$ s omezeními $\sum_{j=1}^n y_j = 1$ a $y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$. Tedy umíme spočíst $\beta(x)$ pro zafixované x.

Získáme duál D programu P, který vypadá $\max x_0$ s omezeními $1x_0 \leq M^T x$. $x_1, x_2, \ldots, x_m$ z x jsou zafixovaná proto pak máme jen jednu proměnnou x_0. Dle věty o dualitě 2.6 jsou výsledky P a D stejné a to $\beta(x)$

Upravíme-li si D na D', s proměnnými $x_0, x_1, \ldots, x_m$, $\max x_0$ s omezeními $1x_0 - M^T x \leq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1, x \geq 0$. Tak máme lineární program, protože všechny omezení jsou lineární. Takový D' má optimum $(x_0^*, x_1^*, \ldots, x_m^*)$, a nechť $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$. Pak máme $x_0^* = \beta(x^*) = \max x \in S_1 \beta(x)$. Tedy máme optimum v nejhorším případě pro hráče 1.

Symetricky uděláme to samé pro hráče 2. A máme P', kde jsou proměnné $y_0, y_1, \ldots, y_n$, $\min y_0$, s omezeními $1y_0 - My \leq 0, \sum_{j=1}^n y_j = 1, y \geq 0$. S obdobným optimem a výsledkem $y_0^* = \alpha(y^*) = \min_{y \in S_2} \alpha(y)$.

P' a D' jsou podle standartního převodu mezi primárním a duálním programem vzájemně duální. Navíc mají stejnou optimální hodnotu $\beta(x^*) = \alpha(y^*)$ a podle lemma o vlastnostech funkcí α a β 2.4 specificky *3.* víme, že (x^*, y^*) je Nashovo ekvilibrium 2.8. □

2.6 Podmínka nejlepší odpovědi

Theorem 2.7 (Podmínka nejlepší odpovědi)**.** *Ve hře v normálním tvaru 2.1 $G = (P, A, u)$, pro každého hráče $i \in P$, smíšená strategie s_i 2.3 je nejlepší odpovědí na s_{-i}, právě tehdy když všechny čisté strategie 2.2 v doméně smíšené strategie s_i 2.4 jsou nejlepší odpovědi na s_{-i}*

Důkaz podmínky nejlepší odpovědi. Mějme nejdříve jako předpoklad, že každá čistá strategie a_i v doméně smíšené strategie $Supp(s_i)$ je nejlepší odpovědí i-tého hráče na a_{-i}. Tedy $\forall s_i' \in S_i : u(s_i'; s_{-i}) \leq u_i(a_i; s_{-i})$. Pak z linearity střední hodnoty užitkové funkce smíšené strategie 2.5 u_i máme

$$u_i(s) = \sum_{a_i \in Supp(s_i)} s_i(a_i) u_i(a_i; s_{-i}) \geq \sum_{a_i \in Supp(s_i)} s_i(a_i) u_i(s_i'; s_{-i}) = u_i(s_i'; s_{-i}),$$

kde máme $\sum_{a_i \in Supp(s_i)} s_i(a_i) = 1$. Tedy pak s_i je nejlepší odpovědí na s_{-i}.

Pro spor mějme s_i jako nejlepší odpověď na s_{-i} a předpokládejme, že existuje $\bar{a}_i \in Supp(s_i)$, která ale není nejlepší odpovědí na s_{-i}. Pak je $s_i(\bar{a}_i)$ nenulové a $\exists s_i' \in S_i : u(\bar{a}_i; s_{-i}) < u_i(s_i'; s_{-i})$. Protože s_i je nejlepší odpověď tak máme $s_i(\bar{a}_i) < 1$ a dle linearity u_i existuje $\hat{a}_i \in Supp(s_i)$: $u(\bar{a}_i; s_{-i}) < u_i(\hat{a}_i; s_{-i})$. Zavedeme si novou smíšenou strategii s_i^*, kterou uděláme tak, že nastavíme $s_i^*(\bar{a}_i = 0)$, $s_i^*(\hat{a}_i) = s_i(\hat{a}_i) + s_i(\bar{a}_i)$ a zbytek necháme jako v s_i. Očividně je to smíšená strategie a tím, že $s_i(\hat{a}_i) \geq 0$ máme

$$u_i(s_i^*; s_{-i}) = \sum_{a_i \in A_i} s_i^*(a_i) u_i(a_i; s_{-i}) > \sum_{a_i \in A_i} s_i(a_i) u_i(a_i; s_{-i}) = u_i(s).$$

To je ale spor s výběrem s_i jako nejlepší strategie, protože jsme našli lepší. □

2.7 Hledání Nashových ekvilibrií pomocí výčtu domén smíšených strategií

Definition 2.15. *Bimaticová hra není degenerovaná, když existuje nejvýšše k čistých 2.2 nejlepších odpovědí 2.7 pro každou smíšenou strategii s velikostí její domény k 2.4.*

Pro takové zavádíme značení pomocí matic $N, M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, že $u_1(i,j) = (M)_{i,j}$ a $u_2(i,j) = (N)_{i,j}$ pro všechny páry $(i,j) \in A$.

Algoritmus 1 Výčet domén strategií

Vstup: nedegenerovaná bimaticová hra G 2.15
Výstup: všechna Nashova ekvilibria 2.8 G

1: **for** každé $k \in \{1, 2, \ldots, \min\{m, n\}\}$ a páru domén (I, J), každá velikosti k **do**
2: Vyřešíme systém rovnic $\sum_{i \in I} (N^T)_{j,i} x_i = v$, $\sum_{j \in J} (M)_{i,j} y_j = u$ pro všechna $i \in I, j \in J$ a $\sum_{i \in I} x_i = 1$, $\sum_{j \in J} y_j = 1$.
3: Když $x, y \geq 0$ a $u = \max\{(M)_i y : i \in A_1\}$ a $v = \max\{(N^T)_j x : j \in A_2\}$ pak vrať (x, y) jako Nashovo ekvilibrium
4: **end for**

Vysvětlení algoritmu 1. Je to algoritmus, který hrubou silou pomocí podmínky nejlepší odpovědi 2.7 najde Nashova ekvilibria. Když (s_1, s_2) je Nashovým ekvilibriem v nedegenerované bimaticové hře 2.15, tak strategie s_1 a s_2 mají stejně velké domény. Tedy stačí jen projet všechny $I \subseteq A_1$, $J \subseteq A_2$, pro velikosti k, kde $k \in \{1, 2, \ldots, \min\{m, n\}\}$. Pak překontrolujeme zda I, J nám dají nějaká ekvilibria a popřípadě oznámíme nález. Tento přístup pro $m = n$ trvá $\approx 4^n$ kroků. Navíc pro více hráčů nemáme ani lineární systémy rovnic. □

2.8 Polytopy nejlepších odpovědí

Definition 2.16. *Polyedr nejlepších odpovědí hráče* 1 *ve hře G je polyedr*

$$\bar{P} = \{(x, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : x \geq 0, 1^T x = 1, N^T x \leq 1v\}$$

a pro hráče 2 *máme obdobný:*

$$\bar{Q} = \{(y, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y \geq 0, 1^T y = 1, Mx \leq 1u\}$$

Tedy pro body (x, v) a (y, u) máme výplatní funkci pro hráče 1., kde pro libovolnou smíšenou strategii máme

$$u_1(s) = x^T M y \leq x^T 1u = u \sum_{i \in A_1} x_1 = u.$$

Definition 2.17 (Značka)**.** *Mějme bod $(x, v) \in \bar{P}$, pak takový bod má značku $i \in A_1 \cup A_2$, když buď $i \in A_1, x_i = 0$, nebo když $i \in A_2$ a $(N^T)_i x = v$ (tedy i-tá řádka matice N^T).*

Obdobně pro bod $(y, u) \in \bar{Q}$, který má značku $i \in A_1 \cup A_2$, když buď $i \in A_2, x_i = 0$, nebo když $i \in A_1$ a $(M)_i y = u$.

Theorem 2.8. *Profil strategie s je Nashovým ekvilibriem hry G, právě tehdy když $((x, v), (y, u)) \in \bar{P} \times \bar{Q}$ je plně značený, jinými slovy, každá značka 2.17 $i \in A_1 \cup A_2$ se ukáže v množině značek buď (x, v) nebo (y, u).*

Důkaz věty 2.8. Dle věty o podmínce nejlepší odpovědi 2.7, máme že pro každého hráče $i \in P$, se smíšenou strategií 2.3 s_i je nejlepší odpovědí na s_{-i}, právě tehdy když všechny čisté strategie 2.2 v doméně smíšené strategie s_i 2.4 jsou nejlepšími odpověďmi na s_{-i}. Chybějící značka i by přesně znamenala, že čistá strategie u hráče 1 ($x_i > 0$) by nebyla nejlepší odpovědí ($(M)_i y < u$), to samé pro hráče 2.

Pokud máme každou značku u nějakých s_1, s_2, tak jsou to vzájemně nejlepší odpovědi, protože každá čistá strategie buď je nejlepší odpovědí nebo není v příslušné doméně strategie. □

Definition 2.18 (Normalizovaný polytop nejlepších odpovědí)**.** *Předpokládejme, že M a N^T jsou nezáporné a nemají nulový sloupec. Normalizovaný polytop nejlepších odpovědí pro hráče 1 ve hře G je*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^m : x \geq 0, N^T x \leq 1\}$$

a pro hráče 2 máme

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^n : y \geq 0, Mx \leq 1\}.$$

Theorem 2.9. *Nechť $s = (s_1, s_2)$ je profilem strategie ve hře G a buď x a y vektory smíšených strategií 2.3 s_1 a s_2. Pak s je Nashovým ekvilibriem hry G, právě tehdy když bod $(x/u_2(s), y/u_1(s)) \in P \times Q \setminus \{(0,0)\}$ je kompletně označen 2.17.*

Komentář k 2.9. Zavedeme-li si transformaci $\bar{P}$ na $P \setminus \{0\}$, pomocí $(x, v) \to x/v$ tak pak je toto jen přeformulovaná 2.8. □

Algoritmus 2 Výčet bodů

Vstup: nedegenerovaná bimaticová hra G 2.15
Výstup: všechna Nashova ekvilibria G
for každý pár (x,y) bodů z $(P \setminus \{0\}) \times (Q \setminus \{0\})$ **do**
když (x,y) je plně označen tak ho vrátíme jako $((x/(1^T x), (y/(1^T y))$ Nashovo ekvilibrium
end for

Vysvětlení algoritmu 2. Pomocí předešlého faktu 2.9 máme jednoduchý algoritmus, kde je na konci jen nutná normalizace abychom dostaly vektory smíšené strategie. Problém je množství bodů a jejich kombinace takže je to zase exponenciální algoritmus v $O(dNv)$, kde máme-li $m = n$, tak vrcholů je c^n s konstantou $c > 1$, kde c je omezeno z geometrie a celkem bodů bude maximálně 2.9^n. □

2.9 Lemke-Howson algoritmus

Definition 2.19. *Odhozením značky 2.17 $l \in A_1 \cup A_2$ v bodě $x \in P$ 2.18 znamená že vezmeme unikátní hranu incidentní s x a má značky všechny až na l. Na druhé straně takové hrany máme bod y, který má značky stejné jako x až na l, která je nahrazena značkou jinou, o které říkáme, že ji sebereme.*

Theorem 2.10. *Lemke-Howson algoritmus 3 skončí po konečném počtu kroků a vrátí dvojici vektorů smíšených strategií 2.3, které jsou Nashova ekvilibria 2.8 G.*

Důkaz věty 2.10. Nechť k je první značka vybraná v prvním kroku algorimu. Definujeme si *graf konfigurací K*, kde množina vrcholů jsou $(x, y) \in P \times Q$, takové že jsou k-skoro plně značené, tedy takové, kde značky $A_1 \cup A_2 \setminus \{k\}$ jsou každá alespoň značkou alespoň x nebo y. Protože P a Q mají

Algoritmus 3 Lemke-Howson

Vstup: nedegenerovaná bimaticová hra G 2.15

Výstup: Nashovo ekvilibriuim G

1: $(x, y) \leftarrow (0, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$
2: $k \leftarrow i \in A_1 \cup A_2$, kde i je libovolná
3: $l \leftarrow k$
4: **while** (True) **do**
5: V P *odhodíme* 2.19 l v bodě x a x předefinujeme na nový bod, který získáme, a l předefinujeme na naši novou *sebranou* značku. Přehodíme se do Q
6: Když $l = k$ tak vyskočíme z cyklu
7: V Q *odhodíme* l v bodě y a y předefinujeme na nový bod, který získáme, a l předefinujeme na naši novou *sebranou* značku. Přehodíme se do P
8: Když $l = k$ tak vyskočíme z cyklu
9: **end while**
10: Vrátíme $(x/(1^T x)), (y/(1^T y))$

konečně mnoho bodů (nebereme jako body ty na hranách a stěnách atd.), tak i množina vrcholů je konečná. Body (x, y) a (x', y') mají mezi sebou hranu v K, když je buď $x = x'$ v P a yy' hrana v Q, nebo $y = y'$ v Q a xx' hrana v P.

Ukážeme, že K má body se stupni jen 1 či 2, tedy je to disjunktní sjednocení cyklů a cest. V K máme jen dva druhy vrcholů a sice takové, že mají všechny značky, takový vrchol pak má jen jednoho souseda, protože jen jeden z x, y má značku k, kterou můžeme odhodit a přejít tedy jen na jednoho souseda. Jinak (x, y) mají značky $A_1 \cup A_2 \setminus \{k\}$ a máme jednoznačnou značku sdílenou mezi x a y. Pak můžeme jak z x, tak y odhodit tuto duplicitní značku tak, aby vedla hrana zase do jiného vrcholu grafu. Tedy stupeň je 2.

Lemke-Howson pak prochází unikátní hrany v K začínajíc v listu $(0, 0)$. Hrany jsou unikátní díky tomu, jak vybíráme další hranu a sice jak odhazujeme značky, tak máme-li hranu, kterou jsme přišli do vrcholu, tak tu máme jako tu odhozenou a sebrat můžeme jen další unikátní hranu pomocí přesunu v druhém polytopu. Tedy díky výběru víme, že každý vrchol navštívíme jen a pouze jednou. Algoritmus tedy končí po konečně mnoha krocích v jakémsi listu (x^*, y^*). Tento list, aby byl listem, musí být úplně označen a tedy dle důsledku 2.9 máme, že je pak $(x/(1^T x)), (y/(1^T y))$ Nashovým ekvilibriem. □

Theorem 2.11. *V nedegenerované bimaticové hře 2.15 G má lichý počet Nashových ekvilibrií 2.8.*

Definition 2.20 (Efektivní implementace Lemke-Howson algortimu 3)**.** *Doplňkové pivotování je metoda podobná simplexové metodě.*

2.10 Třída PPAD

Definition 2.21. *Třída FNP je třída problémů, kde problém dostane jako vstup instanci problému z NP a výstupem je buď NE, nebo existuje-li řešení, tak vrátí řešení instance tohoto problému.*

Funkcionální SAT je FNP-complete problém.

Definition 2.22. *Nechť NASH je problémem hledání Nashova ekvilibria 2.8 v bimaticových hrách.*

Theorem 2.12. *Je-li NASH 2.22 problém FNP-complete 2.21 tak NP = coNP*

Algoritmus 4 Doplňkové pivotování

Vstup: nedegenerovaná bimaticová hra G

Výstup: Nashovo ekvilibrium hry G

Přidáme pomocné proměnné $s \in \mathbb{R}^n$ a $r \in \mathbb{R}^m$

Zapíšeme polytopy jako soustavu rovnic:

$N^\top x + s = 1$ a $r + My = 1$

$x, y, s, r \geq 0$

Vybereme libovolnou značku $k \in A_1 \cup A_2$

Nastavíme x_k (pokud $k \in A_1$) nebo y_k (pokud $k \in A_2$) jako vstupní proměnnou

while (neexistuje úplně označený vrchol) **do**

Pomocí *testu minimálního poměru*, tedy $\frac{q_i}{c_{i,j}}$, kde q_i jsou hodnoty pravé strany a $c_{i,j}$ jsou koeficienty a určíme odcházející proměnnou

Provedeme pivotovací operaci: vyměňte vstupní a odcházející proměnnou

Ujistíme se, že proveditelnost řešení je zachována

end while

return $(x/(1^T x), y/(1^T y))$

Důkaz 2.12. Existuje-li redukce v polynomiálním čase mezi funkcionálním SAT a NASH, tak máme algoritmus A zobrazující každou SAT formuli φ na bimaticovou hru $A(\varphi)$ a algoritmus B převádějící každé Nashovo ekvilibrium 2.8 $s = (s_1, s_2)$ hry $A(\varphi)$ na validní řešení $B(s_1, s_2)$ SATu φ, a odpoví NE pro vše ostatní.

Stačí nám ukázat, že SAT patří do coNP, protože pak NP $\subseteq$ coNP a máme $X \in NP \iff \bar{X} \in coNP$ z definice coNP. Tedy máme-li NP $\subseteq$ coNP, pak $X \in coNP \iff \bar{X} \in NP \Rightarrow \bar{X} \in coNP \iff X \in NP$ a tedy máme i $coNP \subseteq NP$ a tedy $NP = coNP$.

Pokud v polynomiálním čase umíme ověřit nesplnitelnost φ pomocí obrazu $A(\varphi)$, pak SAT je v coNP. Díky Nashově větě 2.1 víme, že $A(\varphi)$ má Nashovo ekvilibrium $s = (s_1, s_2)$, pro důkaz nesplnitelnosti φ jsou nutné dvě podmínky. Nejdřive zda řešení $A(\varphi)$ je Nashova rovnováha, umíme ověřit díky polynomiálnosti algoritmu A a podmínce nejlepší odpovědi 2.7. Dále překontrolujeme, že $B(s_1, s_2)$ vrací NE. Splňuje-li (s_1, s_2) obě podmínky, tak jsme dokázali nesplnitelnost SAT a tedy jsme v polynomiálním čase dokázali SAT $\in$ coNP □

Definition 2.23. *END-OF-LINE problém je následující: Pro orientovaný graf G, kde každý bod má maximálně jednoho předka a jednoho následníka. My ale takový graf nemáme na vstupu (třeba se nevejde do paměti atd.), ale máme jen bod a funkci, která v polynomiálním čase spočte předka, či následníka (existují-li).*

O tomto problému se dá také přemýšlet tak, že máme bod, který je řešení, a máme funkci f, která umí řešení vylepšit, tedy určuje následníka jako další řešení a my chceme to nejlepší řešení.

Definition 2.24. *Třída PPAD ("Polynomial Parity Argumets on Directed graphs") je třída problémů redukovatelných na END-OF-LINE problém 2.23.*

Theorem 2.13. *NASH 2.22 je PPAD-complete 2.24*

2.11 ϵ-Nashova ekvilibria

Definition 2.25 (ϵ-Nashovo ekvilibrium)**.** *Mějme hru v normální formě 2.1 $G = (P, A, u)$ a nechť $\epsilon > 0$. Profil strategií $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ je ϵ-Nashovo ekvilibrium, když $\forall i \in P$ a pro každou strategií $s'_i \in S_i$ máme $u_i(s_i) \geq u_i(s'_i; s_{-i}) - \epsilon$.*

Vzhledem k tomu, že se jedná o přímé rozvolnění Nashova ekvilibria 2.8 tak z Nashovy věty 2.1 plyne, že každá hra G má ϵ-Nashovo ekvilibrium. Také platí, že každé Nashovo ekvilibrium má kolem sebe ϵ-Nashova ekvilibria, avšak opačná implikace neplatí.

Theorem 2.14. *Mějme hru $G = (P, A, u)$ dvou hráčů, kteří mají oba m akcí, takových že výplatní matice mají prvky v intervalu $[0, 1]$. Pro každé $\epsilon > 0$ existuje algoritmus, který spočte ϵ-Nashovo ekvilibrium 2.25 hry G v čase $m^{O(\log m/\epsilon^2)}$*

Theorem 2.15 (Hoeffding bound)**.** *Nechť $Z = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} Z_i$ je náhodná veličina, kde $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny s $0 \leq Z_i \leq 1$. Nechť $\mu = \mathbb{E}[Z]$, pak $\forall t : 0 < t < 1 - \mu$ máme*

$$Pr[Z - \mu \geq t] \leq e^{-2st^2}$$

Theorem 2.16. *Pro každé Nashovo ekvilibrium 2.8 hry G s vektory smíšených strategií 2.3 (x^*, y^*) a $\forall \epsilon > 0$ existuje pro každé celé číslo $k \geq 48 \ln m/e^2$, pár (x, y) k-unifomních strategií, takový že (x, y) je ϵ-Nash ekvilibrium 2.25, tedy $|x^T My - (x^*)^T My^*| < \epsilon$ a $|x^T Ny - (x^*)^T Ny^*| < \epsilon$*

Důkaz pomocné věty 2.16. Pro dané ϵ si zafixujeme $k \geq 48 \ln m/\epsilon^2$. Náhodně vybereme k akcí podle pravděpodobnostních rozdělení x^* a y^* a získané multimnožiny nechť jsou po řadě X a Y. Vybereme si x, tak aby to byl vektor smíšených strategií, který přiřadí pravděpodobnost $\mu(a_i)/k$ každé akci $a_i \in A_i$, kde $\mu(a_i)$ je počet a_i v X. Analogicky zavedeme i y.

Mějme označení $A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $A_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Nechť x^i je vektor smíšené strategie pro každou čistou strategii 2.2 $a_i \in A_1$ a y^j pro $b_j \in A_2$. Na kontrolu zda (x, y) je ϵ-Nashovo ekvilibrium musíme zajistit dvě věci:

- Výplatní hodnota se moc neliší od hodnoty v Nashově ekvilibriu

$$\phi_1 = \left\{(x, y)|\left|x^T My - (x^*)^T My^*\right| < \epsilon/2\right\}$$

$$\phi_2 = \left\{(x, y)|\left|x^T Ny - (x^*)^T Ny^*\right| < \epsilon/2\right\}$$

- Žádný hráč nemá jak zlepšit svou výplatu o více než ϵ

$$\pi_{1,i} = \left\{(x^i)^T My < x^T My + \epsilon\right\} \text{ pro všechna } i \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

$$\pi_{2,j} = \left\{x^T My^j < x^T My + \epsilon\right\} \text{ pro všechna } j \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

Stanou-li se všechny najednou

$$\Pr[GOOD] = \phi_i \cap \phi_2 \cap \bigcap_{i=1}^{m} \pi_{1,i} \cap \bigcap_{j=1}^{m} \pi_{2,j}$$

tedy když $\Pr[GOOD] > 0$ pak věta platí.

Na ukázání tohoto faktu se hodí si zavést pomocné

$$\phi_{1,a} = \{(x, y)|\left|x^T My^* - (x^*)^T My^*\right| < \epsilon/4\}$$

$$\phi_{1,b} = \{(x, y)|\left|x^T My - x^T My^*\right| < \epsilon/4\}$$

$$\phi_{2,a} = \{(x, y)|\left|(x^*)^T My - (x^*)^T Ny^*\right| < \epsilon/4\}$$

$$\phi_{2,b} = \{(x, y)|\left|x^T Ny - (x^*)^T Ny\right| < \epsilon/4\}$$

pro které platí $\phi_{1,a} \cap \phi_{1,b} \subseteq \phi_1$

$$\left|x^T My - (x^*)^T My^*\right| \le \left|x^T My - x^T My^*\right| + \left|x^T My^* - (x^*)^T My^*\right| < \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon/2.$$

Výběr x odpovídá výběru prvku z X s pravděpodobností $1/k$. Tedy $x^T My^*$ je vlastně suma k vzájemně nezávislých prvků, kde každý má střední hodnotu $(x^*)^T My^*$. Dle Hoeffding bound 2.15 máme Pr $\left[\overline{\phi_{1,a}}\right] \le 2e^{-k\epsilon^2/8}$ a to samé dostaneme pro $\phi_{1,b}$, tedy máme Pr $\left[\overline{\phi_1}\right] \le 4e^{-k\epsilon^2/8}$. To samé analogicky máme pro $\overline{\phi_2}$

Teď už musíme prověřit jen pravděpodobnosti $\pi_{1,i}, \pi_{2,j}$. Zavedeme si opět pomocné množiny

$$\psi_{1,i} = \{(x,y) | (x^i)^T My < (x^i)^T My^* + \epsilon/2\} \text{ pro všechna } i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

$$\psi_{2,j} = \{(x,y) | x^T Ny^j < (x^*)^T Ny^j + \epsilon/2\} \text{ pro všechna } j \in \{1, 2, \dots, m\}$$

kde pak máme $\psi_{1,i} \cap \phi_1 \subseteq \pi_{1,i}$ a $\psi_{2,j} \cap \phi_2 \subseteq \pi_{2,j}$. Nashovo ekvilibrium (x^*, y^*) nám dává $(x^i)^T My^* \le (x^*)^T My^*$ z toho máme

$$(x^i)^T My < (x^i)^T My^* + \epsilon/2 \le (x^*)^T My^* + \epsilon/2 < x^T My + \epsilon$$

opět dle Hoeffding bound 2.15, protože $(x^i)^T My$ jsou vlastně součtem k nezávislých proměnných s očekávanou hodnotou $(x^i)^T My^*$, máme Pr $\left[\overline{\psi_1, i}\right] \le e^{-k\epsilon^2/2}$. Obdobně postupujeme pro $\psi_{2,j}$ a $\pi_{2,j}$

$$\Pr\left[\overline{GOOD}\right] \le \Pr\left[\overline{\phi_1}\right] + \Pr\left[\overline{\phi_2}\right] + \sum_{i=1}^{m} \Pr\left[\overline{\pi_1, i}\right] + \sum_{j=1}^{m} \Pr\left[\overline{\pi_2, j}\right] \le 8e^{-k\epsilon^2/8} + 2m(e^{-k\epsilon^2/2} + 4e^{-k\epsilon^2/8}) < 1$$

a tedy Pr $[GOOD] > 0$ a tedy máme chtěné (x, y) jako ϵ-Nashovo ekvilibrium. □

Důkaz věty 2.14. Vektory smíšených strategií (x, y) jsou ϵ-Nashova ekvilibria, právě tehdy když pro každé vektory smíšených strategií (x', y') máme $(x')^T My \le x^T My + \epsilon$ a $x^T Ny' \le x^T Ny + \epsilon$. Smíšená strategie je k-uniformní je-li to rovnoměrná distribuce na multimnožině S čistých strategií s $|S| = k$.

Věta 2.16 implikuje větu kterou se snažíme dokázat. Pro to aby to bylo vidět stačí zafixovat $k = 48 \ln m/\epsilon^2$ a prohledáme všechna k-uniformní ϵ-Nashova ekvilibria. Existuje maximálně $(m^k)^2$ multimnožin X a Y které je potřeba překontrolovat. A překontrolovat podmínku ϵ-Nashových ekvilibrií je jednoduché, protože stačí zkoumat odchylky k čistým strategiím. Díky volbě k máme $m^{O(\log m/\epsilon^2)}$ □

2.12 Korelovaná ekvilibria

Definition 2.26 (Korelované ekvilibrium)**.** *Pro hru v normální formě 2.1 $G = (P, A, u)$ mějme pravděpodobnostní distribuci p na A. Tedy $p(a) \ge 0$ pro každé $a \in A$ a $\sum_{a \in A} p(a) = 1$. Distribuce p je korelované ekvilibrium v G, když*

$$\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a'_i; a_{-i}) p(a_i; a_{a_{-i}}) \le \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i; a_{-i}) p(a_i; a_{a_{-i}})$$

pro všechny hráče i a všechny čisté strategie 2.2 $a_i, a'_i \in A_i$.

Korelované ekvilibrium je náhodné přiřazení doporučení akcí hráčů takové, že se nikomu nevyplatí nejednat podle doporučení.

Theorem 2.17. *V každé hře G v normální formě 2.1 máme pro každé Nashovo ekvilibrium 2.8 odpovídající korelované ekvilibrium 2.26.*

Důkaz věty 2.17. Nechť $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ je profil strategií, mějme funkci $p_{s^*}(a) = \prod_{j=1}^n s_j^*(a_j)$ pro všechny strategie $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$. Jasně je $p_{s^*} \geq 0$ a indukcí dle n se dá i ukázat, že $\sum_{a \in A} p_{s^*}(a) = 1$ a je to tedy pravděpodobnostní distribuce.

Teď už je zbývá ukázat, že pro Nashovo ekvilibrium s^* je p_{s^*} korelované ekvilibrium. Zafixujeme si $i \in P$ a $a_i, a_i' \in A_i$. Předpokládejme $s^*(a_i) > 0$ a tedy že čistá strategie a_i je v doméně strategie s^* 2.4. Z definice u_i a p_{s^*} máme

$$u_i(a_i'; s_{-i}^*) = \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i'; a_{-i}) \prod_{j=1, j \neq i}^n s_j^*(a_j) = \frac{1}{s_i^*(a_i)} \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i'; a_{-i}) p_{s^*}(a_i; a_{-i})$$

analogicky máme to samé pro a_i

$$u_i(a_i; s_{-i}^*) = \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i; a_{-i}) \prod_{j=1, j \neq i}^n s_j^*(a_j) = \frac{1}{s_i^*(a_i)} \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i; a_{-i}) p_{s^*}(a_i; a_{-i})$$

Dle podmínky nejlepší odpovědi 2.7 a toho, že s^* je Nashovo ekvilibrium, tak máme že a_i v doméně s^* je také nejlepší odpovědí na s_{-i} a tedy $u_i(a_i'; s_{-i}^*) \leq u_i(a_i; s_{-i}^*)$ a tedy

$$\frac{1}{s_i^*(a_i)} \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i'; a_{-i}) p_{s^*}(a_i; a_{-i}) \leq \frac{1}{s_i^*(a_i)} \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i; a_{-i}) p_{s^*}(a_i; a_{-i})$$

a stačí nám obě strany přenásobit $s_i^*(a_i)$ má hledanou rovnici. Navíc když $s_i^*(a_i) = 0$ tak $p_{s^*}(a_i; a_{-i}) = 0$ pro všechna $a_{-i} \in A_{-i}$ a tedy máme korelované ekvilibrium. $\square$

Theorem 2.18. *V každé hře v normální formě 2.1 $G = (P, A, u)$, je konvexní kombinace korelovaných ekvilibrií 2.26 opět korelované ekvilibrium.*

Důkaz 2.18. Mějme p, p' korelovaná ekvilibria a ukážeme, že $p'' = tp + (1-t)p'$ je také korelované ekvilibrium.

$$\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i; a_{-i}) p''(a_i; a_{-i}) = \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i; a_{-i})(tp(a_i; a_{-i}) + (1-t)p'(a_i; a_{-i})) \geq$$

$$\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i'; a_{-i})(tp(a_i; a_{-i}) + (1-t)p'(a_i; a_{-i})) = \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} u_i(a_i'; a_{-i}) p''(a_i; a_{-i})$$

pro všechny hráče a čisté strategie 2.2 $a_i, a_i' \in A_i$ $\square$

2.13 Minimalizace lítosti

Definition 2.27. *Mějme N akcí $X = \{1, 2, \ldots, N\}$ v každém kroku online algoritmus A vybere pravděpodobnostní distribuci $p^t = (p_1^t, p_2^t, \ldots, p_N^t)$ nad X. Tedy takové p_i^t pro všechna $i \in X$ a $\sum_{i=1}^N p_i^t = 1$. Po zvolení distribuce nám protivník vybere vektor ztráty $l^t = (l_1^t, l_2^t, \ldots, l_N^t) \in [-1, 1]^N$, kde jednotlivé prvky reprezentují hodnotu ztráty při výběru akce i v kroku t. Algoritmus dostane vektor ztráty a utrpí ztrátu $l_A^t = \sum_{i=1}^N p_i^t l_i^t$. To je střední hodnota ztráty A v t-tém kroce. Po T krocích máme ztrátu akce i jako $L_i^T = \sum_{t=1}^T l_i^t$, ztráta A je $L_A^T = \sum_{t=1}^T l_A^t$*

Definition 2.28. *Mějme porovnávací třídu algoritmů $\mathcal{A}$ a nechť T je dané kladné celé číslo. Při minimalizaci lítosti (regret) se snažíme udělat algoritmus A, takový aby L_A^T bylo co nejblíže $L_{\mathcal{A},min}^T = \min B \in \mathcal{A} L_B^T$. Tedy minimalizujeme vnější lítost (external regret) $R_{A,\mathcal{A}}^T = L_A^T - L_{\mathcal{A},min}^T$*

Mějme $\mathcal{A}_X = A_i : i \in X$, tedy třída, kde vybíráme vždy jen jednu akci. Zjednodušujeme notaci na $L^T_{\mathcal{A}_X,min} = L^T_{\min}$ a $R^T_{A,\mathcal{A}_X} = R^T_A$.

Nechť $\mathcal{A}_{all}$ je třída všech online algoritmů přiřazujících pravděpodobnost 1 nějaké akci z X.

Theorem 2.19. *Pro libovoný online algoritmus 2.27 A a každé $T \in \mathbb{N}$, tak existuje posloupnost ztrátových vektorů délky T, taková že $R^T_{A,\mathcal{A}_all}$ algortimu A je alespoň $T(1-\frac{1}{N})$.*

Důkaz věty 2.19. Pro všechna $t \in \{1,2,\dots,T\}$ vybereme vektor ztráty l^t, tak že zvolíme $i_t \in X$ s nejmenší p^t_i. Nastavíme $l^t_{i_t} = 0$ a pro $i_t \neq i$ nastavíme $l^t_i = 1$. Protože $p^t_{i_t} \leq 1/N$ máme $l^t_A \geq (1-1/N)$ pro všechna t a tedy máme $L^T_A = T(1-1/N)$.

Majíc algoritmus $B \in \mathcal{A}_all$ který má pravděpodobnost $p^t_{i_t} = 1$ má $L^T_A = 0$ a tedy $R^T_{A,\mathcal{A}_all} = L^T_A - L^T_B = T(1-1/N)$. □

Algoritmus 5 Hladový algoritmus

Vstup: Množina akcí $X = (1,2,\dots,N)$ a číslo $T \in \mathbb{N}$
Výstup: Pravděpodobnostní distribuce p^t pro každé $t \in \{1,2,\dots,T\}$

```
p^1 ← (1, 0, 0, ..., 0)
for t ∈ 2, ..., T do
    L^{t-1}_min ← min_{j∈X} {L^{t-1}_j}
    S^{t-1} ← {i ∈ X : L^{t-1}_j = L^{t-1}_min}
    k ← min_{j∈S^{t-1} j}
    p^t_k ← 1
    p^t_i ← 0 pro i ≠ k
end for
vrátíme {p^t : t ∈ {1, 2, ..., T}}
```

Theorem 2.20. *Nakumulovaná ztráta hladového algoritmu 5 je*

$$L^T_{HLAD} \leq N \cdot L^T_{\min} + N - \left|S^T\right| \leq N \cdot L^T_{\min} + N - 1$$

Důkaz ztráty hladového algoritmu 2.20. Na každou ztrátu 1 v $L^T_{\min}$ ztratíme nejvíce N-krát jedničku při našem algoritmu, protože vždy alespoň jeden index zmizí z S^t v dalším kroku. A z toho máme

$$L^T_{HLAD} \leq N \cdot L^T_{\min} + N - \left|S^T\right| \leq N \cdot L^T_{\min} + N - 1$$

□

Theorem 2.21. *Pro každý deterministický algoritmus D a $T \in \mathbb{N}$, tak existuje posloupnost ztrátových vektorů, kde $L^T_D = T$ a $L^T_{\min} \leq \lfloor T/N \rfloor$. Tedy $L^T_D \geq N \cdot T + L^T_{\min} + (T \ mod \ N)$*

Důkaz omezení na online algority 2.21. Nechť je i_t akce zvolená algoritmem D v kroce t, tedy je to akce s $p^t_{i_t} = 1$. Vybereme vektor ztráty l^t, že jeho prvek na místě i_t je 1. Pak po T krocích máme ztrátu T.

Máme N akcí a tedy principem holubníku máme akci zvolenou D, nechť je to i, takovou že byla D zvolena maximálně $\lfloor T/N \rfloor$-krát, tedy konstrukcí vektorů l^t bude-li minimální algoritmus v porovnání vybírat akci i, tak jeho ztráta bude $L^T_{\min} \leq \lfloor T/N \rfloor$. □

Algoritmus 6 Polynomiální váhy

Vstup: Množina akcí $X = (1, 2, \dots, N)$, číslo $T \in \mathbb{N}$, $\eta \in (0, 1/2]$.
Výstup: Pravděpodobnostní distribuce p^t pro každé $t \in \{1, 2, \dots, T\}$

$w_i^1 \leftarrow 1$ pro $i \in X$
$p^1 \leftarrow (1/N, 1/N, \dots, 1/N)$
for $t \in 2, \dots, T$ **do**
  $w_i^t \leftarrow w_i^{t-1}(1 - \eta l_i^{t-1})$
  $W^t \leftarrow \sum_{i=1}^N w_i^t$
  $p_i^t \leftarrow w_i^t / W^t$ pro všechna $i \in X$
end for
vrátíme $\{p^t : t \in \{1, 2, \dots, T\}\}$

Theorem 2.22. *Pro $\eta \in (0, 1/2]$, každou posloupnost $[-1, 1]$-ztrátových vektorů a každé $k \in X$ máme celkovou ztrátu L_{PV}^T v kroku $T \in \mathbb{N}$*

$$L_{PV}^T \leq L_k^T + \eta Q_k^T + \ln N / \eta$$

kde $Q_k^T = \sum_{t=1}^T (l_k^t)^2$. Navíc když $T \geq 4 \ln N$, tak nastavení $\eta = \sqrt{\ln N / T}$ s tím že očividně $Q_k^T \leq T$ máme

$$L_{PV}^T \leq L_{\min}^t + 2\sqrt{T \ln N}.$$

Důkaz 2.22. Vše dokážeme pomocí odhadů na W, a sice utrží-li algoritmus velkou ztrátu, tak se W velmi zmenší. Pro krok k máme $l_{PV}^t = \sum_{i=1}^N w_i^t l_i^t / W^t$ a každá váha w_i^t je přenásobena $(1 - \eta l_i^{t-1})$. Tedy máme $W^{t+1} = W^t - \sum_{i=1}^N \eta w_i^t l_i^t = W^t(1 - \eta l_{PV}^t)$. Jinými slovy váha odebrána z W^t v kroku t je η-zlomek ztráty v daném kroku. Vzhledem k tomu, že $W^1 = N$ máme

$$W^{T+1} = W^1 \prod_{i=1}^T (1 - \eta l_{PV}^t) = N \prod_{t=1}^T (1 - \eta l_{PV}^t)$$

z odhadu $\forall z \in \mathbb{R} : 1 - z \leq e^{-z}$

$$W^{T+1} \leq N \prod_{t=1}^T e^{-\eta l_{PV}^t} = N e^{-\eta \sum_{t=1}^T l_{PV}^t}$$

logaritmujeme obě strany a máme

$$\ln W^{T+1} \leq \ln N - \eta \sum_{t=1}^T l_{PV}^t = \ln N - \eta L_{PV}^T$$

tedy horní odhad pro W^{T+1}.

Pro spodní odhad W^{T+1} máme $W^{T+1} \geq w_k^{T+1}$ a máme pomocí definice

$$\ln W^{T+1} \geq \ln w^{T+1} = \sum_{t=1}^T \ln(1 - \eta l_k^t).$$

Odhadneme $\ln(1 - z) \geq -z - z^2$ pro $z \leq 1/2$ a tedy dostaneme

$$\sum_{t=1}^T \eta l_k^t - \eta^2 (l_k^t)^2 = \eta L_K^T - \eta^2 Q_k^T.$$

A máme tedy hledané
$$\eta L_K^T - \eta^2 Q_k^T \leq \ln N - \eta L_{PV}^T.$$
□

Theorem 2.23. *Pro celá čísla N a $T < \lfloor \log_2 N \rfloor$, tak existuje stochastické generování ztrát, takové že pro každý online algortimus 2.27 A, máme $\mathbb{E}\left[L_A^T\right] \geq T/2$ a $L_{\min}^T = 0$.*

Theorem 2.24. *Máme-li $N = 2$ akce, tak existuje stochastické generování ztrát, takové že pro každý online algoritmus 2.27 máme $\mathbb{E}\left[L_A^T - L_{\min}^T\right] \geq \Omega(\sqrt{T})$.*

2.14 Bezlítostná dynamika

Definition 2.29 (Hra v normální formě)**.** *Mějme hru v normální formě 2.1 $G = (P, A, C)$, kde máme užitkovou funkci vyměněnou za $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$, kde $C_i : A \to [-1, 1]$, říkáme jí nákladová funkce a snažíme se ji minimalizovat.*

Standartní model je pak, že každý hráč hraje G T-krát použitím online algoritmu 2.27 ON_i, který má distribuci pravděpodobností p_i^t na A_i. p_i^t je vektor smíšené strategie 2.3 hráče i v kroku t. $l_{ON_i}^t = \mathbb{E}_{a^t \sim p^t}\left[C_i(a^t)\right]$ je ztráta hráče i v kroku t.

Algoritmus 7 Bezlítostná dynamika

Vstup: Hra v normální formě 2.29 $G = (P, A, C)$, $T \in \mathbb{N}$ a $\epsilon > 0$
Výstup: Pravděpodobnostní distribuce p_i^t na A_i pro každé $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$ a $i \in P$

```
for t ∈ 1, 2, ..., T do
    Každý hráč si zvolí nezávisle smíšenou strategii p_i^t pomocí algoritmu, který má očekávanou
    ztrátu maximálně ϵ s akcemi odpovídajícím čistým strategiím 2.2
    Každý hráč dostane vektor ztráty l_i^t = (l_i^t(a_i))_{a_i ∈ A_i}, kde l_i^t(a_i) ← E_{a_{-i}^t ∼ p_{-i}^t} [C_i(a_i; a_{-i}^t)]
    p_{-i}^t = ∏_{j≠i} p_j^t
end for
vrátíme {p^t : t ∈ {1, 2, ..., T}}
```

Například pokud každý použije algoritmus polynomiálních vah, tak každý je aktualizuje váhy svých čistých strategií.

2.15 Nový důkaz Minimax věty

Theorem 2.25. *Mějme zero-sum ($C_1(a) - C_2(a) = 0$ pro všechna $a \in A$) hru $G = \{\{1, 2\}, A, C\}$, kde hodnota hry je v, ostatní definice z 2.5. Když hráč $i \in \{1, 2\}$ hraje G pomocí online algoritmu ON_i s vnější lítostí 2.28 R, pak jeho kumulovaná ztráta je $L_{ON_i}^T$ splňuje*

$$L_{ON_i}^T \leq Tv + R$$

Důkaz věty 2.25. Symetrií to stačí ukázat pro hráče 1. Nechť $p_{2,j}^t$ je pravděpodobnost toho, že druhý hráč vybere j-tou akci z A_2 v kroce t. Zadefinujeme si vypozorovaný vektor smíšené strategie 2.3 dle frekvence daných akcí hraných hráčem 2 jako $q = (q_1, q_2, \ldots, q_{|A_2|})$, kde $q_j = \sum_{t=1}^{T} p_{2,j}^t / T$. Víme že pro libovolný vektor smíšené strategie q druhého hráče má hráč 1 akci a_i, že $\mathbb{E}_{b_2 \sim q}\left[C(a_i, b_2)\right] \leq v$, tedy použijeme-li je pokaždé, tak máme $L_{ON_i,\min}^T \leq L_{ON_i,i}^T \leq vT$. A vzhledem k předpokladu o vnější lítosti R algoritmu ON_i, tak máme $L_{ON_i}^T \leq L_{ON_i,\min}^T + R \leq vT + R$ □

Nový důkaz minimax věty 2.5. Rozdělíme důkaz na dvě nerovnosti a začneme s $\max_x \min_y x^T My \leq \min_y \max_x x^T My$(toto jou vlastně jen přepsané podmínky věty o optimální odpovědi za předpokladu že druhá strana hraje tak abychom vydělali minimálně), protože je jednodušší. Protože x^* je optimální strategii prvního hráče hraje-li první a může si vybrat x^* i když hraje druhý. Je jen horší jít první, ale stále platí nerovnost.

Všechny $m_{i,j} \in [-1, 1]$, jinak je přeškálujeme. Vybereme $\epsilon \in (0, 1]$ a spustíme bezlístostnou dynamiku 7 T dostkrát, aby oba hráči měli očekávanou vnější lítost (regret) ϵ. Využijeme-li třeba algoritmu polynomiálních vah 6 tak stačí $T \geq 4 \ln \max\{m, n\}/\epsilon^2$, kde $m = |A_1|, n = |A_2|$, díky tomu že ztráta při kroku je $2\sqrt{\ln \max\{m, n\}/T}$.

Nechť $p_1, p_2, \ldots, p_T$, $q_1, q_2, \ldots, q_T$ jsou smíšené strategie hráče 1 a 2, která jsou doporučena algoritmem. Máme výplatní vektory Mq^t a $-(p^t)^T M$ pro oba hráče. Mějme $\bar{x} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p^t$ průměrnou smíšenou strategií hráče 1 a pro hráče 2 $\bar{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p^t$. Průměrná očekávaná výplata je $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(p^t)^T Mq^t$.

Pro čistou strategii 2.2 a_i zavedeme smíšenou strategii e_i, která má všude 0, kromě i-tého indexu, kde je jedna. Protože vnější lítost je maximálně ϵ u hráče jedna, tak máme

$$e_i^T M\bar{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} e_i^T Mq^t \leq \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(p^t)^T Mq^t + \epsilon = v + \epsilon$$

pro všechna $i \in \{1, \ldots, m\}$. Vzhledem k tomu, že každá smíšená strategie je lineární kombinací e_i tak linearitou střední hodnoty máme $\forall x \in S_i : \sum_{t=1}^{T} x^T M\bar{y} \leq v + \epsilon$. Pro hráče dva máme symetrický argument tak máme $\forall y \in S_2 : \sum_{t=1}^{T} \bar{x}^T My \geq v - \epsilon$.

Dáme-li vše dohromady tak máme

$$\max_{x\in S_1} \min_{y\in S_2} x^T My \geq \min_{y\in S_2} (\bar{x})^T My \geq v - \epsilon$$

$$\geq max_{x\in S_1} x^T M\bar{y} - 2\epsilon \geq \min_{y\in S_2} \max_{x\in S_1} x^T My - 2\epsilon.$$

Pro $T \to \infty$ máme $\epsilon \to 0$ a tedy nerovnost platí. □

2.16 Hrubá korelovaná ekvilibria

Definition 2.30 (Hrubé korelované ekvilibrium)**.** *Pro hru v normální formě 2.29 $G = (P, A, C)$, pravděpodobnostní distribuce p na A je hrubé korelované ekvilibrium v G*

$$\sum_{a\in A} C_i(a)p(a) \leq \sum_{a\in A} C_i(a_i'; a_{-i})p(a)$$

pro všechna $i \in P$ a $a' \in A_i$.

To samé pomocí střední hodnoty zavedeme jako

$$\mathbb{E}_{a\sim p}[C_i(a)] \leq \mathbb{E}_{a\sim p}[C_i(a_i'; a_{-i})]$$

Rozdíl oproti korelovanému ekvilibrium je v tom, že korelované ekvilibrium nám poradí akci a hráč vybírá zda rady využít či ne, při hrubém je to tak že otázka není tady je doporučená akce ano/ne, ale je to otázka ano/ne zda dát na doporučení aniž bychom ho znali.

Definition 2.31. *ϵ-hrubé korelované ekvilibrium v G je p na A, takové že*

$$\sum_{a \in A} C_i(a)p(a) \leq \left(\sum_{a \in A} C_i(a'_i; a_{-i})p(a) \right) + \epsilon$$

pro všechna i a $a' \in A$.

$$\mathbb{E}_{a \sim p}\left[C_i(a)\right] \leq \mathbb{E}_{a \sim p}\left[C_i(a'_i; a_{-i})\right] + \epsilon$$

Theorem 2.26. *Mějme hru $G = (P, A, C)$, daný parametr $\epsilon > 0$ a $T = T(\epsilon) \in \mathbb{N}$. Předpokládejme že po T krocích bezlítostné dynamiky 7, tak každý hráč má časově-průměrnou ztrátu maximálně ϵ. Nechť $p^t = \sum_i^n p_i^t$ a $p = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^T p^t$ je průměrem z pravděpodobnostní distribuce výsledků. Pak p je ϵ-hrubé korelované ekvilibrium. Tedy je*

$$\mathbb{E}_{a \sim p}\left[C_i(a)\right] \leq \mathbb{E}_{a \sim p}\left[C_i(a'_i; a_{-i})\right] + \epsilon$$

pro každého hráče a jeho příslušnou $a'_i \in A_i$.

Důkaz věty 2.26. Z definice p máme

$$\mathbb{E}_{a \sim p}\left[C_i(a)\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{a \sim p^t}\left[C_i(a)\right]$$

a také

$$\mathbb{E}_{a \sim p}\left[C_i(a'_i : a_{-i})\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{a \sim p^t}\left[C_i(a'_i : a_{-i}\right].$$

Vzhledem k tomu, že každý hráč má průměrně v čase ztrátu maximálně ϵ a pravé strany znamenají průměr v čase očekávaných ztrát, když každý hraje podle svého algoritmu a druhá znamená že hraje zafixovanou a'_i, tak máme

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{a \sim p^t}\left[C_i(a)\right] \leq \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{a \sim p^t}\left[C_i(a'_i : a_{-i}\right] + \epsilon$$

což je definice ϵ-hrubého korelovaného ekvilibria. □

2.17 Lítost z výměny

Definition 2.32. *Vnitřní lítost je situace, kde si hráč může posloupnost online akcí modifikovat tím, že zamění všechny výskyty akce i za akci j.*

Definition 2.33. *Rozšířením vnitřní lítosti 2.32 je lítost z výměny (swap regret), tedy nějaké zobrazení $X \to X$*

Máme-li $L_A^T = \sum_{t=1}^T l_A^t$ je ztráta A, kde $l_A^t = \sum_{i=1}^N p_i^t l_i^t$ tedy ztráta A v kroku t.

Máme modifikační pravidlo $\mathcal{F} : X \to X$ tak pak modifikovaná posloupnost $(f^t)_{t=1}^T = (F(p^t))_{t=1}^T$, kde $f^t = (f_1^t, \ldots, f_N^t)$ a $f_i^t = \sum_{j:F(j)=i} p_j^t$. Pak $L_{A,\mathcal{F}}^T = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N f_i^t l_i^t$.

Theorem 2.27. *Pro každý algoritmus R-externí ztráty existuje online algoritmus $M = M(A)$, takový že pro každou funkci $F : A \to A$ a $t \in \mathbb{N}$ platí*

$$L_M^T \leq L_{M,F}^T + NR.$$

Tedy lítost z výměny u M je maximálně NR.

Důkaz věty 2.27. M zkonstruujeme z N kopií A, tak že v každém t kroku A_i vrátí pravděpodobnostní distribuci $q_i^t = (q_{i,1}^t, q_{i,2}^t, \dots, q_{i,N}^t)$, kde $q_{i,j}^t$ je zlomkem, který A_i přiřadí akci $x \in X$. Zkonstruujeme pravděpodobnostní distribuci $p^t = (p_1^t, p_2^t, \dots, p_N^t)$ tím,že necháme $p_j^t = \sum_{i=1}^N p_i^t q_{i,j}^t$ pro $\forall j \in X$. Tedy $(p^t)^T = (p^t)^T Q^t$, kde Q^t je $N \times N$ matice, kde $(Q^t)_{i,j} = q_{i,j}^t$. Interpretujeme-li Q^t jako matici přechodu Markovova řetězce, tak p^t je stacionární distribuce. Volba p^t tedy dovoluje interpretaci výběru akce $j \in X$ buď že je přímo vybraná s pravděpodobností p_j^t a nebo nejdříve vybereme algoritmus A_i s pravděpodobností p_i^t a pak vybereme j s pravděpodobností $q_{i,j}^t$.

Jakmile dostane vektor ztráty l^t, tak pro každé $i \in X$ máme $p_i^t l^t$ pro algoritmus A_i. A_i pak má ztrátu $(p_i^t l^t) q_i^t$ na kroku t. Protože je R-ztrátový algoritmus A_i tak pro každou akci $j \in X$ máme

$$\sum_{t=1}^T p_i^t (q_i^t l^t) \leq \sum_{t=1}^T p_i^T l_j^t + R.$$

Sečteme-li všechny ztráty algoritmů A_i v kroce t, na akcích $i \in X$ pak máme $\sum_{i=1}^N p_i^t (q_i^t l^t) = (p^t)^T Q^t l^t$. Tedy celková ztráta na kroku t je díky výběru p^t; $p^t \cdot l^t$.

Sečteme-li vše přes akce $i \in X$, tak levá strana je L_M^T a protože pravá strana platí pro všechna $j \in X$ tak platí i pro libovolnou funkci $F : X \to X$

$$L_M^T \leq \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T p_i^t l_{F(i)}^t + N \cdot R \leq L_{M,F}^T + N \cdot R$$

□

Theorem 2.28 (Důsledek 2.27 a 2.22)**.** *Existuje online algoritmus 2.27 A, takový že pro každou $F : X \to X$ a $T \in \mathbb{N}$, máme*

$$L_A^T \leq L_{A,F}^T + O(N\sqrt{T \log N}).$$

Algoritmus 8 Dynamika bez lítosti ze změny (No-swap-regret dynamics)

Vstup: Hra v normální formě 2.29 $G = (P, A, C)$, $T \in \mathbb{N}$ a $\epsilon > 0$
Výstup: Pravděpodobnostní distribuce p_i^t na A_i pro každé $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ a $i \in P$

1: **for** $t \in 1, 2, \dots, T$ **do**
2: Každy hráč si zvolí nezávisle smíšenou strategii p_i^t pomocí algoritmu, který má lítost z výměny maximálně 2.33 ϵ s akcemi odpovídajícím čistým strategiím 2.2
3: Každý hráč dostane vektor ztráty $l_i^t = (l_i^t(a_i))_{a_i \in A_i}$, kde $l_i^t(a_i) \leftarrow \mathbb{E}_{a_{-i}^t \sim p_{-i}^t} \left[C_i(a_i; a_{-i}^t)\right]$
4: $p_{-i}^t = \prod_{j \neq i} p_j^t$
5: **end for**
6: vrátíme $\{p^t : t \in \{1, 2, \dots, T\}\}$

Theorem 2.29. *Mějme hru $G = (P, A, C)$, daný parametr $\epsilon > 0$ a $T = T(\epsilon) \in \mathbb{N}$. Předpokládejme že po T krocích dynamiky bez lítosti ze změny 8 tak každý hráč má časově-průměrnou ztrátu maximálně ϵ. Nechť $p^t = \sum_i^n p_i^t$ a $p = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T p^t$ je průměrem z pravděpodobnostní distribuce výsledků. Pak p je ϵ-korelované ekvilibrium 2.26. Tedy je*

$$\mathbb{E}_{a \sim p}\left[C_i(a)\right] \leq \mathbb{E}_{a \sim p}\left[C_i(F(a_i); a_{-i})\right] + \epsilon$$

pro každého hráče a libovolnou $F : A_i \to A_i$ funkci.

Důkaz věty 2.29. Z definice p a libovolného $F : A_i \to A_i$ máme

$$\mathbb{E}_{a\sim p}\left[C_i(a)\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}_{a\sim p^t}\left[C_i(a)\right]$$

a také

$$\mathbb{E}_{a\sim p}\left[C_i(F(a):a_{-i})\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}_{a\sim p^t}\left[C_i(F(a):a_{-i}\right].$$

Vzhledem k tomu, že každý hráč má průměrně v čase ztrátu maximálně ϵ a pravé strany znamenají průměr v čase očekávaných ztrát a druhá znamená hraní ne-tak-příznivé akce $F(a_i)$ místo a_i, tak máme

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}_{a\sim p^t}\left[C_i(a)\right] \leq \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}_{a\sim p^t}\left[C_i(a'_i:a_{-i}\right] + \epsilon$$

což je definice ϵ-korelovaného ekvilibria pro $p = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p^t$. □

2.18 Hry v rozšířeném tvaru

Definition 2.34. *Hra v rozšířeném tvaru je orientovaný strom, kde vrcholy reprezentují stavy hry. Hra začíná v kořenu stromu a končí v listech, kde každý hráč získá výplatu. Každý vrchol jenž není listem je rozhodovacím uzlem a hrany mezi vrcholy odpovídají hrané akci v daném stavu hry, ze kterého hrana vede, do stavu hry, který máme, když hráč zahraje danou akci.*

Hratelné akce jsou tedy takové, které vycházejí z rozhodovacího uzlu.

Definition 2.35. *Hrají-li hráči hru v rozšířeném tvaru 2.34 a vždy znají rozhodovací uzel, ve kterém zrovna jsou (tedy znají i historii jak jsme se k němu dobrali), tak pak máme hru s dokonalou informací.*

Definition 2.36. *Rozdělíme-li rozhodovací uzly na množiny informací, kde množina informací vždy patří jednomu hráči a mají stejné hratelné akce, a každý hráč zná jen v jaké množině informací je, a ne nutně jak se tam dostal a kde konkrétně, pak se jedná o hru s nedokonalou informací.*

Pro hráče i definujeme H_i jako množinu informačních množin daného hráče, a pro množinu informací $h \in H_i$ máme C_h jako množinu akcí v h.

Definition 2.37. *Behaviorální strategie hráče i je ditribuce pravděpodobností na C_h pro každé $h \in H_i$. Tedy je to strategie, kde výběr akce u dané informace je nezávislá na ostatních.*

Definition 2.38. *Posloupnost tahů hráče i až do uzlu t je $\sigma_i(t)$ je jednoznačná cesta z kořene do t. Prázdnou značíme $\emptyset$.*

Definition 2.39. *Hra s dokonalou pamětí, je taková, že žádný z hráčů nezapomene žádnou informaci o tazích které zatím zahrál.*

Hráč i má dokonalou paměť, právě tehdy když pro každé $h \in H_i$ a libovolné uzly $t, t' \in h$ máme $\sigma_i(t) = \sigma_i(t')$, pak σ_h značí jednoznačnou posloupnost vedoucí ke každé $t \in h$.

Mají-li dokonalou paměť všichni hráči, pak i hra je s dokonalou pamětí.

Theorem 2.30 (Khunova věta)**.** *Ve hře s dokonalou pamětí 2.39, každá smíšená strategie 2.3 daného hráče a ekvivalentní behaviorální strategie 2.37 jsou vzájemně nahraditelné.*

2.19 Sekvenční tvar

Definition 2.40. *Reperezentace posloupností hry s nedokonalou informací G 2.36 je čtveřice (P, S, u, C), kde P je množina hráčů, $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$, kde S_i je množina posloupností tahů 2.38 hráče i, $u = (u_1, \dots, u_n)$, kde $u_i : S \to \mathbb{R}$ je výplatní funkce a $C = (C_1, \dots, C_n)$ je množina lineárních omezení na realizační pravděpodobnosti hráče i.*

$\sigma \in S_i$ je buď $\emptyset$ nebo jednoznačně určitelná pomocí posledního kroku c při množině informací h, tedy $\sigma = \sigma_h c$, máme $S_i = \{\emptyset\} \cup \{\sigma_h c : h \in H_i, c \in C_h\}$, $|S_i| = 1 + \sum_{h \in H_i} |C_h|$.

Hráči i a posloupnosti $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in S$ je $u_i(\sigma) = u_i(l)$, kde l je list, do kterého se dostaneme hrál by hráč j posloupnost σ_j a jinak 0. Definice C_i je v 2.41.

Definition 2.41. *Realizační plán behaviorální strategie 2.37 β_i hráče i je $x : S_i \to [0, 1]$ definovaná jako $x(\sigma_i) = \prod_{c \in \sigma_i} \beta_i(c)$. Hodnota $x(\sigma_i)$ je realizační pravděpodobnost.*

Totožně je to také zadefinovatelné

$$x(\emptyset) = 1$$

$$\sum_{c \in C_h} x(\sigma_h c) = x(\sigma_h) \text{ pro každé } h \in H.$$

kde C_i je množina omezení druhého typu.

2.20 Počítání ekvilibrií ve hrách reprezentovaných posloupnostmi

Theorem 2.31. *Mějme realizační plán 2.41 jako vektor $x = (x_\sigma)_{\sigma \in S_1} \in \mathbb{R}^{|S_1|}$ a $y = (y_\sigma)_{\sigma \in S_2} \in \mathbb{R}^{|S_2|}$. Pak lineární omezení z definice reprezentace posloupností můžeme přepsat*

$$Ex = e, x \geq 0, \text{ a } Fy = f, y \geq 0,$$

kde E, F mají $1 + |H_1|$ a $1 + |H_2|$ řádků, kde první řádka $Ex = e$ je $x(\emptyset) = 1$ pro e a obdobně pro F. Zbytek řádek $Ex = e$ je $-x(\sigma_h) + \sum_{c \in C_h} x(\sigma_h c) = 0$ pro $h \in H_1$. Obdobně je to u $Fy = f$

Ekvilibrium zero-sum hry dvou hráčů v rozšířeném tvaru 2.34 s dokonalou pamětí jsou řešením lineárního programu

$$\min_{u,y} e^T u \text{ s omezeními } Fy = f, E^T u - Ay \geq 0, y \geq 0.$$

Či jeho dualu

$$\min_{v,x} f^T v \text{ s omezeními } Ex = e, F^T v - A^T x \geq 0, x \geq 0.$$

Kde $A = -B$ je výplatní matice pro tuto hru.

Theorem 2.32. *(x, y) realizační plány 2.41 ve hře dvou hráčů v rozšířeném tvaru s dokonalou pamětí je ekvilibrium, právě tehdy když existují vektory u a v, takové že splňují*

$$x^T (E^T u - Ay) = 0, y^T (F^T v - B^T x) = 0,$$

$$Ex = e, x \geq 0, Fy = f, y \geq 0,$$

$$E^T u - Ay \geq 0, F^T v - B^T x \geq 0.$$

jinak nabídne moc, či málo.

3 Návrh mechanismů

3.1 Vickeyho aukce

Definition 3.1. *Awesome aukce je aukce splňující následující podmínky*

- *Garance silné incentivy: aukce je DSIC (dominant strategy incentive compatible) když má každý hráč dominantní strategii (tedy maximalizuje jeho užitek) a to pravdivě nabízet* $b_i = v_i$. *Navíc užitek pravdomluvného hráče je nezáporný.*
- *Garance vysokého výkonu, a sice pokud všichni nabízejí pravdivě tak aukce maximalizuje sociální užitek* $\sum_{i=1}^{n} v_i x_i$.
- *Aukce je implementovatelná v polynomiálním čase.*

Definition 3.2 (Vickeyho aukce)**.** *Mějme vítěze* i *a nejvyšší* b_i, *a nechť zaplatí druhý nejvyšší* b_j, *tedy* $p = max_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}} b_j$.

Theorem 3.1. *Vickeyho aukce 3.2 jsou awesome 3.1.*

Důkaz 3.1.

- Je jasně lineárně implementovatelná
- Zafixujme si i a mějme $B = max_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}} b_j$, pak když $b_i < B$ tak i prohraje a utilita je 0. Jinak $b_i \geq B$ pak i vyhraje a má užitek $v_i - B$. Užitek je nezáporný u všech a nejvyšší možný užitek je $v_i - B$ a tedy i ten máme.
- Je-li v_i výherce tak $v_i \geq v_j$, a protože všichni nabízejí pravdivě, tak $x_i = 1$ a ostaní jsou 0, tedy sociální užitek je 1, který je zjevně maximem.

□

3.2 Myersonovo lemma

Definition 3.3. *Jednoparametrové prostředí je, že máme* n *nabízejících a každý má soukromou* v_i. *Máme možnou množinu* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *odpovídající možným výsledkům. Každý prvek* X *je vektor* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *kde* x_i *je část výsledku, o který se zajímá* i*-tý nabízející.*

Uzamčené nabídky znamenají

- *Sesbíráme nabídky* $b = (b_1, \dots, b_n)$
- *Alokační pravidlo: vybereme možný výsledek (alokaci)* $x = x(b)$ *z* X.
- *Pravidlo platby: vybereme* $p(b) = (p_1(b), \dots, p_n(b)) \in \mathbb{R}^n$.

Dvojice (x, p) *značí mechanismus, kde*

$$u_i(b) = v_i \cdot x_i(b) - p_i(b),$$

kde platby jsou jen v rozmezí $[0, b_i \cdot x_i(b)]$.

Sociální užitek se rozumí $\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i(b)$.

Definition 3.4. *Implementovatelné alokační pravidlo* x *pro jednoparametrové prostředí 3.3 je takové, když existuje pravidlo platby* p *pro machanismus* (x, p), *že je DSIC 3.1.*

Definition 3.5. *Alokační pravidlo pro jednoparametrové prostředí 3.3 je monotónní, když* $\forall i$ *nabízející a všechna* b_{-i} *ostatních je alokační pravidlo* $x_i(z; b_{-i})$ *pro* i *neklesající v nabídce* z.

Tedy zvýšením nabídky neklesne počet toho, co získáme.

Theorem 3.2 (Myersonovo lemma)**.** *Pro jednoparametrové prostředí 3.3 následující tvrzení platí*

1. *Alokační pravidlo je implementovatelné 3.4, právě tehdy když je monotónní 3.5.*

2. *Je-li alokační pravidlo x monotóní, tak existuje jednoznačné pravidlo platby p takové, že mechanismus (x, p) je DSIC 3.1. (předpokládejme $b_i = 0 \Rightarrow p_i(b) = 0$)*

3. *Pravidlo platby je jednoznačně dáno*

$$p_i(b) = \int_0^{b_i} z \cdot \frac{d}{dz} x_i(z; b_{-i})\ dz$$

Náznak důkazu Myersonova lemmatu 3.2. Začnu tím, že pokud je DSIC, pak musí být x monotónní. Máme $u_i(z; b_{-i}) = v_i x_i(z; b_{-i}) - p_i z; b_{-i}$ a pro DSIC platí, že $b_i = v_i$. Nabídneme-li $y \neq z$, tak se užitek nesmí zvýšit, musí tedy platit, že dodáme-li nepravdivou nabídku y a nechť máme $v_i = z$

$$u(y; b_{-i}) = z \cdot x_i(y; b_{-i}) - p_i(y; b_{-i}) \leq z \cdot x_i(z; b_{-i}) - p_i(z; b_{-i}) = u(z; b_{-i})$$

pro ale nepravdivou nabídku z pro $v_i = y$ máme

$$u(z; b_{-i}) = y \cdot x_i(z; b_{-i}) - p_i(z; b_{-i}) \leq y \cdot x_i(y; b_{-i}) - p_i(y; b_{-i}) = u(y; b_{-i})$$

kde pak máme *payment difference sandwich*:

$$z(x_i(y; b_{-i}) - x_i(z; b_{-i})) \leq p_i(y; b_{-i}) - p_i(z; b_{-i}) \leq y \cdot (x_i(y; b_{-i}) - x_i(z; b_{-i}))$$

protože $0 \leq y < z$ máme $x_i(y; b_{-i}) \leq x_i(z; b_{-i})$, tedy mechanismus (x, p) je DSIC, pak x je monotóní.

Pokud je x monotónní, tak existuje jedinečné p, které dělá mechanismus DSIC. Mějme x monotónní a zafixujme si i a b_{-i} a x_i, p_i jako funkce z. Předpokládejme, že x_i je po-částech konstantní, tedy graf funkce je složený z intervalů a skoků mezi nimi.

Použijeme $jump(f, t)$ pro po-částech konstantní funkci f, abychom určili výšku skoku na bodu t. Zafixujme si z z payment difference sandwich a nechť se y k němu blíží, pak obě strany se stanou 0 pokud není žádný skok v x_i na bodu z (tedy $jump(x_i, z) = 0$). Pokud ale skok je nenulový v bodě z, tak obě strany nerovnice jdou k $z \cdot h$. Tedy je-li mechanismus (x, p) DSIC, tak omezení pro p musí platit pro všechna z

$$jump(p_i, z) = z \cdot jump(x_i, z).$$

Zkombinujeme toto omezení s podmínkou $p_i(0; b_{-i} = 0)$, tak máme vzorec pro p

$$p_i(b) = \sum_{j=1}^{l} z_j \cdot jump(x_i(\cdot; b_{-i}), z_j),$$

kde $z_1, \ldots, z_l$ jsou zlomové body v alokačním pravidle $x_i(\cdot; b_{-i})$ na intervalu $[0, b_i]$.

Generalizujeme toto pomocí matematické analýzy na obecné monotónní funkce x_i. Jde se na to pomocí vydělení payment difference sandwich pomocí $z - y$ a limity, kdy se $z \rightarrow y$, tak máme omezení

$$p_i'(y; b_{-i}) = y \cdot x_i'(y; b_{-i})$$

a kombinací s $p_i(0; b_{-i}) = 0$ máme pro každé z

$$p_i(b) = \int_0^{b^i} z \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} x_i(z; b_{-i}) \, \mathrm{d}z$$

A tedy máme jednoznačně určenou p pro mechanismus (x, p) aby byl DSIC.

Zbývá už jen ukázat monotónost x, pak i (x, p) je DSIC. Vzhledem k tomu, že pro nabízejícího i máme užitek $u_i(b) = v_i \cdot x_i(b) - p_i(b)$. Využijeme-li $p_i(b) = \sum_{j=1}^{l} z_j \cdot jump(x_i(\cdot; b_{-i}), z_j)$ odpovídá časti $[0, b_i] \times [0, x_i(b)]$ nalevo od $x_i(\cdot; b_{-i})$, pak je vidět, že se vyplatí $b_i = v_i$ jinak nabídne moc, či málo. □

3.3 Batohové aukce

Definition 3.6. *Batohová aukce hráčů $1, \ldots, n$ má každý dva parametry: veřejnou $w_i \geq 0$ a soukromé ohodnocení v_i. Máme jednoho prodejce, který má kapacitu $W \geq 0$. Možná množina X jsou vektory $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ takové, že $\sum_{i=1}^{n} x_i w_i \leq W$, kde $x_i = 1$ indikující, že hráč i je výhercem.*

Definition 3.7. *Hladové alokační pravidlo $x^G = (x_1^G, \ldots, x_n^G) \in X$ pro dané $b = (b_1, \ldots, b_n)$ vybere podmožinu hráčů, že $\sum_{i=1}^{n} x_i^G w_i \leq W$. Výběr je takový, že přidáváme seřazené dle $<$ hráče dokud se vejdou a následně buď vrátíme vybrané hráče nebo nejvyššího b_i podle toho co vytváří větší sociální užitek.*

Theorem 3.3. *Za předpokladu pravdivých nabídek, tak sociální užitek hladového pravidla 3.7 x^G je alespoň polovina maximálního možného sociálního užitku.*

Důkaz věty 3.3. Mějme $w_1, \ldots, w_n$, $v_1, \ldots, v_n$, které jsou zároveň nabídkou ($v_i = b_i$) kvůli pravdivosti, W je kapacita. Problém zrelaxujeme tak, že pro každého i máme zlomek $\alpha_i \in [0, 1]$, že i přidává $\alpha_i v_i$ do řešení. Teď vybereme vítěze hladově a posledního je-li to nutné přidáme zlomkově.

Mějme $1, \ldots, k$ výherce vybrané x^G a pro spor mějme nějaké lepší řešení, že má vyšší sociální užitek. Pak naše řešení zlepšíme změnou α_i za větší β_i, a protože $a_1 = \cdots = a_{k-1} = 1$ máme $i \geq k$. Protože $\sum_{l=1}^{k} \alpha_i w_i = W$, tak je $j \in \{1, \ldots, k\}$, že $j < i$ a $\beta_j < \alpha_j$. Předpokládejme změnu jen v těchto dvou indexech. Pak $(\beta_i - \alpha_i) w_i \leq (\alpha_j - \beta_j) w_j$, máme $\sum_{l=1}^{k} \alpha_i w_i = W$ a přidáním $(\beta_i - \alpha_i) w_i$, když odebereme $(\alpha_j - \beta_j) w_j$, je sociální užitek větší, máme $(\beta_i - \alpha_i) v_i > (\alpha_j - \beta_j) v_j$. Dělením máme $v_i / w_i > v_j / w_j$, ale protože $j < i$ tak máme spor se seřazením $<$.

Nyní předpokládejme, že ve zlomkovém prostředí má $k - j$ výherců zlomek 1 a k-tý vyhrál zlomkově. Tak sociální užitek prvník krokem je $\sum_{i=1}^{k-1} v_i$ a sociální užitek druhým krokem je alespoň v_k. Tedy oba kroky mají sociální užitek alespoň $\max\{v_k, \sum_{i=1}^{k-1} v_i\}$. Tedy alespoň polovina užitku optimálního řešení zlomkové úlohy, a tedy alespoň užitek optimálního řešení v původní úloze. □

3.4 Maximalizace zisku v aukcích

Definition 3.8. *Ziskem se rozumí $\sum_{i=1}^{n} p_i(b)$.*

Definition 3.9. *Bayesovský model se skládá z částí*

- *jednoparametrové prostředí (x, p)*
- *pro i je v_i z pravděpodobnostní distribuce F_i s hustotou f_i a doménou $[0, v_{max}]$. Tedy $F_i(z)$ je pravděpodobnost, že v_i za F_i má hodnotu maximálně z.*

- *$F_1, \ldots, F_n$ jsou známé návrháři mechanismu, ale vzhledem k tomu, že nás zajímají DSIC aukce tak hráči je nepotřebují znát.*

A snažíme se maximalizovat

$$\mathbb{E}_{v=(v_1,\ldots,v_n)\sim(F_1\times\cdots\times F_n)}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(v)\right].$$

Theorem 3.4. *Nechť (x, y) je DSIC mechanismus v jednoparametrovém prostředí tvořící Bayesový model 3.9, pravděpodobnostními distribucemi $F = F_1 \times \cdot \times F_n$ a jejich hustotami $f_1, \ldots, f_n$. Pak*

$$\mathbb{E}_{v\sim F}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(v)\right] = \mathbb{E}_{v\sim F}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v_i)\cdot x_i(v)\right],$$

kde

$$\varphi_i(v_i) = v_i - \frac{1 - F_i(v_i)}{f_i(v_i)}$$

je virtuální hodnota nabízejícího i s hodnotou v_i z F_i

Důkaz věty 3.4. Z Myersonova lemmatu 3.2 pro DSIC (x, p) a $b_i = v_i$ máme

$$p_i(b) = \int_0^{b_i} z \cdot \frac{d}{dz} x_i(z; b_{-i})\ \mathrm{d}z.$$

Zafixujeme si i a máme

$$\mathbb{E}_{v_i\sim F_i}[p_i(v)] = \int_0^{v_{max}} p_i(v) f_i(v_i)\ \mathrm{d}v_i = \int_0^{v_{max}} \left(\int_0^{v_i} z\frac{d}{dz}x_i(z; b_{-i})\ \mathrm{d}z\right) f_i(v_i)\ \mathrm{d}v_i$$

prohozením máme

$$\int_0^{v_{max}} \left(\int_0^{v_i} z\frac{d}{dz}x_i(z; b_{-i})\ \mathrm{d}z\right) f_i(v_i)\ \mathrm{d}v_i = \int_0^{v_{max}} \left(\int_z^{v_{max}} f_i(v_i)\ \mathrm{d}v_i\right) z\frac{d}{dz}x_i(z; b_{-i})\ \mathrm{d}z$$

kde víme $z \leq v_i$.

Protože f_i je hustota funkce tak máme

$$\int_0^{v_{max}} (1 - F_i(z)) \cdot z\frac{d}{dz}x_i(z; b_{-i})\ \mathrm{d}z$$

per partes zintegrujeme a vyjde nám pak

$$\int_0^{v_{max}} \left(v_i - \frac{1 - F_i(v_i)}{f_i(v_i)}\right) x_i(z; v_{-i}) f_i(z)\ \mathrm{d}z = \int_0^{v_{max}} \varphi_i(z) x_i(z; v_{-i}) f_i(z)\ \mathrm{d}z$$

což je vlastně

$$\mathbb{E}_{v_i\sim F_i}[p_i(v_i; v_{-i})] = \mathbb{E}_{v_i\sim F_i}[\varphi_i(v_i)\cdot x_i(v_i; v_{-i})]$$

vezmeme-li očekávanou hodnotu, pak přes v_{-i}, tak

$$\mathbb{E}_{v\sim F}[p_i(v)] = \mathbb{E}_{v\sim F}[\varphi_i(v_i)\cdot x_i(v)]$$

pak počítáme-li s linearitou střední hodnoty tak nám vypadne

$$\mathbb{E}_{v\sim F}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(v)\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{v\sim F}[p_i(v)] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{v\sim F}[\varphi_i(v_i)\cdot x_i(v)] = \mathbb{E}_{v\sim F}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v_i)\cdot x_i(v)\right]$$

□

3.5 Maximalizace virtuálního sociálního užitku

Theorem 3.5. *Nechť F je regulární distribuce pravděpodobností s hustotou f, a vituálním užitkem φ, $F_1, \ldots, F_n$ jsou vzájemně nezávislé distribuce pravděpodobností n hráčů takové, že se rovnají. Pak Vickreyho aukce 3.2 s rezervou $\varphi^{-1}(0)$ maximalizuje zisk 3.8.*

Důkaz věty 3.5. Dle věty 3.4 je maximalizace zisku stejná jako maximalizace virtuálního sociálního užitku. Abychom ho maximalizovali, tak vybíráme $x(b)$ pro každý vstup b, ale ne pravděpodobnostní distribuce. Mějme virtuální sociální užitek maximalizující mechanismus, který má omezení $\sum_{i=1}^{n} x_i(b) \leq 1$ pro každé b, tedy chceme dát výhru hráči i s nejvyšší $\varphi(b_i)$. Virtuální užitek ale může býti negativní, a pak je nejlepší nikomu nic neprodávat.

Máme tedy alokační pravidlo maximalizující virtuální užitek. Teď stačí ukázat, že je monotónní, protože pak aplikujeme Myersonovo lemma 3.2 a máme DSIC (x, p) mechanismus. Díky tomu, že F je regulární, tak φ sdílená všemi je čistě rostoucí a náš mechanismus je ekvivalentní Vickreyho aukci s rezervou $\varphi^{-1}(0)$. □

3.6 Bulow-Klempererova věta

Theorem 3.6 (Bulow-Klempererova věta)**.** *Nechť $F = F_1 = \cdots = F_n$ je regulární distribuce pravděpodobností a nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak platí*

$$\mathbb{E}_{v_1,\ldots,v_{n+1}\sim F}\left[Rev(VA_{n+1})\right] \geq \mathbb{E}_{v_1,\ldots,v_{n+1}\sim F}\left[Rev(OPT_{F,n})\right]$$

kde $Rev(VA_{n+1})$ je zisk Vickreyho aukce VA_{n+1} s n+1 účastníky bez rezervy a $Rev(OPT_{F,n})$ je zisk optimální aukce pro F s n účastníky.

Důkaz Bulow-Klempererovy věty 3.6. Definujme si pomocnou aukci $\mathcal{A}$ s $n+1$ účastníky, tak že simuluje optimální aukci na n účastnících, kde pokud nebyl předmět dán v předešlém kroku, tak se dá n+1-mu zdarma. Máme

$$\mathbb{E}_{v_1,\ldots,v_{n+1}\sim F}\left[Rev(\mathcal{A})\right] = \mathbb{E}_{v_1,\ldots,v_{n+1}\sim F}\left[Rev(OPT_{F,n})\right]$$

taková aukce vše alokuje

Je-li $F = \cdots = F_n$ regulární, tak Vickreyho aukce maximalizuje očekávaný zisk přes všechny aukce, které vždy alokují předmět. Z věty o vztahu mezi ziskem a virtuálním sociálním užitkem 3.4 tak máme, že optimální aukce, která alokuje předměty, předá předmět hráči s nejvyšším virtuálním ohodonocením (i když potencielně negativním). Vzhledem k regularitě F tak φ stoupá a tedy ten, který má nejvyšší vituální ohodnocení, má i nejvyšší v_i. Takže Vickreyho aukce VA_{n+1} má střední hodnotu zisku alespoň tak vysokou jako aukce, která alokuje všechny předměty, tedy

$$\mathbb{E}_{v_1,\ldots,v_{n+1}\sim F}\left[Rev(VA_{n+1})\right] \geq \mathbb{E}_{v_1,\ldots,v_{n+1}\sim F}\left[Rev(\mathcal{A})\right] = \mathbb{E}_{v_1,\ldots,v_{n+1}\sim F}\left[Rev(OPT_{F,n})\right]$$

□

3.7 Několika parametrové prostředí

Definition 3.10. *Několika parametrové navrhování mechanismů je, kde každý i má různé ohodnocení pro různé předměty. Tedy*

- *n účastníků*
- *konečná množina Ω výsledků*

- *pro každého hráče i ohodnocení $v_i(\omega) \geq 0$ pro $\forall \omega \in \Omega$*

Theorem 3.7 (Vickrey-Clarke-Groves věta)**.** *V každém několika parametrovém prostředí návrhu mechanismů 3.10 je DSIC 3.1 mechanismus na maximalizaci socialního užitku.*

Důkaz věty 3.7. Předpokládáme, že se každý odhalí a vybere se výsledek Ω. Chceme maximalizovat sociální užitek, tedy jsme svázáni vybráním alokačního pravidla, které ho maximalizuje. Dány $b = ((b_1(\omega))_{\omega\in\Omega}, \dots, (b_n(\omega))_{\omega\in\Omega})$ máme

$$x(b) = argmax_{\omega in \Omega} \sum_{i=1}^{n} b_i(\omega).$$

Definujeme pravidlo platby, tak aby nikomu nebylo jedno, jak na tom jsou ostatní tedy

$$p_i(b) = \max_{\omega\in\Omega} \left\{ \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_j(\omega) \right\} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_j(\omega^*)$$

pro každého i, kde $\omega^* = x(b)$, je výsledkem našeho alokačního pravidla x pro daná b. První člen je vlastně sociální užitek ostatních, když vynecháme i. Druhý člen je s i-tým účastníkem. Z definice tedy (x, p) maximalizuje sociální užitek.

Zbývá už jen to, zda je to DSIC, snažíme se tedy ukázat, že každý maximalizuje svůj užitek $v_i(x(b)) - p_i(b)$ nastavením $b_i(\omega) = v_i(\omega)$ pro všechny ω. Dá se ukázat nezápornost $p_i(b)$ a je $\leq b_i(\omega^*)$. Tedy pravdomluvní mají nezáporný užitek.

Zafixujeme si i a ostatní b_{-i}. Když $x(b) = \omega^*$, pak užitek je

$$v_i(\omega^*) - p_i(b) = \left(v_i(\omega^*) + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_j(\omega^*) \right) - \max_{\omega\in\Omega} \left\{ \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_j(\omega) \right\}$$

a vzhledem k tomu, že druhý člen je na b_i nezávislý, tak je nutné maximalizovat ten první, navíc nemá ani, jak ovlivnit ω^*, protože přímo mechanismus (x, y) vybírá ω^*. VCG mechanismus vybere ω^* podle $x(b) = argmax_{\omega in \Omega} \sum_{i=1}^{n} b_i(\omega)$, tak aby součet nabídek byl maximalizován. i je na tom tak že chce vybrat

$$argmax_{\omega in \Omega} \left\{ v_i(\omega) + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_j(\omega) \right\}$$

když nabídky jsou pravdivé tak máme $argmax_{\omega in \Omega} \sum_{i=1}^{n} b_i(\omega)$. Tedy máme (x, p) DSIC, protože jiná strategie než býti pravdomluvným se nevyplácí tolik. □

3.8 Princip odhalení

Definition 3.11. *Přímé odhalení je speciální dominantní strategie, že každý pravdivě prozradí vše soukromé mechanismu.*

Theorem 3.8 (Princip odhalení)**.** *Pro každý několika parametrový mechanismus 3.10 M, kde má každý dominantní strategii, tak nezávisle na soukromém ohodnocení máme ekvivalentní mechanismus M', kde každý má dominantní strategii, a to přímé odhalení 3.11.*

Důkaz principu odhalení. Pro každého i a jeho $(v_i(\omega))_{\omega\in\Omega}$, nechť $s_i((v_i(\omega))_{\omega\in\Omega})$ je dominantní strategie i v M.

Zkonstruujeme M', přijmeme uzavřené nabídky $b_1(\omega)_{\omega\in\Omega}, \ldots, b_n(\omega)_{\omega\in\Omega}$.

Pak M' předá $s_1(b_1(\omega)_{\omega\in\Omega}), \ldots, s_n(b_n(\omega)_{\omega\in\Omega})$ mechanismu M, tedy výsledky jsou pak stejné.

Dle přímého odhalení, pokud i má $v_i(\omega)$, pak nabídnutí něčeho jiného než $v_i(\omega)$ může znamenat jen hraní jiné strategie než $s_i(v_i(\omega)_{\omega\in\Omega})$, což ale znamená jen snížení užitku. $\square$